N° d'Ordre : 200

Année : 1974

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
Mention Mécanique

par

Pierre SPITERI

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE AU SENS DE LIAPOUNOV DE CERTAINS SYSTEMES DIFFERENTIELS NON LINEAIRES

Soutenue le Juin 1974, devant la Commission d'Examen

MM. R. CHALEAT Président

P. CAPODANNO
F. LHOTE
J-C. MIELLOU
F. ROBERT
} Examinateurs

N° d'Ordre : 300

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
Mention Mécanique

Par

Pierre SPITERI

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE AU SENS DE LIAPOUNOV DE CERTAINS SYSTEMES DIFFERENTIELS NON LINEAIRES

Soutenue le [illegible] Juin 1979, [illegible] la Commission d'Examen

MM. R. CHALEAT Président

F. CAPODANNO
P. LHOTE
J.C. MELLUQ
F. ROBERT
Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546611_0013

N° d'Ordre : 200

Année : 1974

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
Mention Mécanique

par

Pierre SPITERI

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE AU SENS DE LIAPOUNOV DE CERTAINS SYSTEMES DIFFERENTIELS NON LINEAIRES

Soutenue le Juin 1974, devant la Commission d'Examen

MM. R. CHALEAT Président

P. CAPODANNO
F. LHOTE
J-C. MIELLOU
F. ROBERT
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE BESANCON

Président : Monsieur THIEBAUT Jean

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr BERNARD Jean : Chimie-Physique
Professeur

ASSESSEUR

Mr PARIZET Jean : Mathématiques
Professeur

DOYENS HONORAIRES

Mrs GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET
THIEBAUT

PROFESSEURS HONORAIRES

Mrs BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT
UEBERSFELD, VINCENSINI, DREYFUSS

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE

Mr GRANIER

PROFESSEURS

Mrs	TRONCHET Antonin	: Botanique
	CHATELET François	: Mathématiques
	MESNAGE Pierre	: Chronométrie
	PERROT Roger	: Chimie Générale
	PLUVINAGE Philippe	: Physique Théorique
	THEOBALD Nicolas	: Géologie Stratigraphique et Paléontologie
	QUANTIN André	: Pédologie
	CHALEAT Raymond	: Mécanique Appliquée
	RIPPLINGER Jean	: Physiologie Animale
	GREMILLARD Jean	: Mathématiques
	VIENOT Jean-Charles	: Physique Gle-Optique
	THIEBAUT Jean	: Pétrographie-Minéralogie
	GOMOT Lucien	: Zoologie et Embryologie
	BENNETON Gaston	: Mathématiques
	GALATRY Louis	: Physique Moléculaire
	THEOBALD Jean-Gérard	: Spectroscopie Hertzienne
	CERUTTI Ernest	/ Chimie Appliquée
	DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
	CAPODANNO Pierre	: Mécanique Théorique
	BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
	ROBERT Daniel	: Physique Moléculaire

UNIVERSITE DE BORDEAUX

Président : Monsieur THIERRAT Jean

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr. BERNARD Jean, Professeur : Chimie-Physique

ASSESSEUR

Mr. PARIZET Jean, Professeur : Mathématiques

DOYENS HONORAIRES

Mme CLAVERIE, MAGDELENAT, CHATELET, THIERRAT

PROFESSEURS HONORAIRES

Mme MATIAMPO, DUFFIEUX, TITRY, THIRAT, BERNARDEAU, VANDERSIGH, DRAYTONS

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE

Mr. CHAVIER

PROFESSEURS

Mme THOUVENOT Antonin	: Géologie
CHATELET Pierrette	: Mathématiques
MESNARD Pierre	: Chronométrie
FERNOT Roger	: Chimie générale
FLUYMACH Philippe	: Physique-Thermique
THEOBALD Nicolas	: Géologie Stratigraphique et Lithologique
QUARTIN André	: Mécanique
CHALEAT Raymond	: Mathématiques Appliquées
BIFFLINGER Jean	: Physiologie animale
GERMILLARD Jean	: Mathématiques
VIENOT Jean-Charles	: Physique Ondes-Optique
THIERRAT Jean	: Thermodynamique-Thermotechnique
COMET Lucien	: Zoologie et Entomologie
SENMATOU Gaston	: Mathématiques
CALATAYU Louis	: Physique Radioélectricité
THEUNAID Jean-Gérard	: Géologie Appliquée Hydrogéologie
CERUTTI Ernest	: Chimie Appliquée
DEVIN Claude	: Chimie Par Ondes
CAPODANNO Pierre	: Mécanique Théorique
BANTEGNIS Robert	: Mathématiques
ROBERT Daniel	: Physique Mathématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mrs	POTIER Robert	: Physique des Solides
	REAL Pierre	: Station Biologique
	GOUARNE René	: Mathématiques
	MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses Minérales
	ROBERT Jacques	: Mathématiques
	OLIVIER Marcel	: Electronique Quantique
	MONTAGNER Hubert	: Psycho-Physiologie
	BULABOIS Jean	: Physique Gle-Optique
	GAUDEMER Yves	: Biochimie

MAITRES DE CONFERENCES

Mrs	BIDAULT Michel	: Taxonomie Expérimentale
	CHAUVE Pierre	: Géologie-Minéralogie
	DUBOUCHET Jacques	: Botanique
	LAUDE Bernard	: Chimie Organique
	MARLE Charles	: Mathématiques
	ROBERT Guy	: Chimie-Physique
	MIELLOU J. Claude	: Analyse Numérique
	WEIL Michel	: Mathématiques
	HAYLI Avram	: Astronomie
	BROQUET Paul	: Géologie
	GRAS Georges	: Mathématiques
	TREHEL Michel	: Informatique

RESPONSABLE DES SERVICES ADMINISTRATIFS

Monsieur RUNGE Jean-Marie

A MES PARENTS,

Avant d'exposer ce travail, il m'est agréable d'avoir l'occasion de remercier tous ceux qui l'ont favorisé et qui m'ont aidé, et, plus particulièrement, les membres du jury qui m'honorent de leur présence.

Monsieur le Professeur R. CHALEAT, Directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée, par son enseignement, m'a initié et donné goût à la Mécanique non linéaire. Il m'a chaleureusement accueilli au sein de son équipe et je tiens à l'assurer ici de ma profonde reconnaissance pour les nombreux conseils et encouragements qu'il m'a sans cesse prodigués.

Monsieur J-C. MIELLOU, Directeur du Laboratoire de Calcul, m'a proposé le sujet de cette étude ; par ses critiques et suggestions il a contribué à son développement et en a permis la réalisation. Je lui exprime ici ma sincère gratitude pour la bienveillance et l'intérêt avec lesquels il a dirigé cette thèse.

Je remercie également :

Monsieur le Professeur P. CAPODANNO, Directeur du Laboratoire de Mécanique Théorique, pour l'intérêt bienveillant qu'il a porté à ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de l'examiner,

Monsieur F. LHOTE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et Micromécanique, pour les précieux conseils qu'il m'a donnés ainsi que pour son aimable participation à la Commission d'Examen,

Monsieur F. ROBERT, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de GRENOBLE, pour ses remarques et ses encouragements, ainsi que pour l'attention particulière qu'il a accordée à cette étude.

Enfin, je ne saurais oublier l'aide efficace que m'a apportée mon camarade J-H . BALBI, Maître-Assistant au Laboratoire de Mécanique Appliquée, par les discussions que nous avons eues ensemble au sujet de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

Chapitre I - THEORIE CLASSIQUE DE LA STABILITE AU SENS DE LIAPOUNOV DES SOLUTIONS DE SYSTEMES DIFFERENTIELS ORDINAIRES

A - Introduction et définitions I.1

1°) Généralités I.1

2°) Définition de la stabilité au sens de LIAPOUNOV I.1

B - Etude locale de la stabilité I.5

1°) Equations aux variations I.5

2°) Théorème de POINCARE-LIAPOUNOV I.6

3°) Remarques I.7

C - Etude de la stabilité globale I.8

1°) Cas des systèmes autonomes I.8

2°) Cas des systèmes non autonomes I.10

Chapitre II - DEFINITION ET ETUDE DE LA STABILITE DES H-SYSTEMES DIFFERENTIELS

A - Introduction et définitions II.1

1°) Généralités II.1

2°) Notion de majorante linéaire d'une application non linéaire relativement à une norme vectorielle p II.2

B - H-systèmes différentiels non autonomes II.3

1°) Généralités II.3

2°) Notion de pseudo-majorante linéaire, associée à un système différentiel ordinaire non linéaire, relativement

Pages

à une norme vectorielle p. Définition des H-systèmes différentiels non autonomes II.3

3°) Applications H-monotones II.4

a - Caractérisation des applications H-monotones linéaires II.4

b - Caractérisation des applications H-monotones non linéaires II.8

4°) Relation entre les notions de H-systèmes différentiels et de H-monotonie ; caractérisation des H-systèmes différentiels II.8

5°) Etude de la stabilité des H-systèmes différentiels non autonomes II.12

a - Première fonction de LIAPOUNOV : Fonction de LIAPOUNOV quadratique II.12

b - Deuxième fonction de LIAPOUNOV : Fonction déduite de la M-V-minorante II.17

c - Corollaire des théorèmes II.2 et II.5 : stabilité absolue des H-systèmes différentiels II.22

d - Corollaire des théorèmes II.4 et II.7 : stabilité uniforme des H-systèmes différentiels II.22

C - H-systèmes différentiels autonomes - Résumé des résultats II.24

1°) Généralités II.24

2°) Notion de H-systèmes différentiels autonomes relativement à une norme vectorielle p II.24

3°) Caractérisation des H-systèmes différentiels autonomes par les applications H-monotones II.24

4°) Etude de la stabilité des H-systèmes différentiels autonomes II.25

Pages

a - Première fonction de LIAPOUNOV : Fonction de LIAPOUNOV quadratique II.25

b - Deuxième fonction de LIAPOUNOV : Fonction déduite de la M-V-minorante II.27

c - Corollaire des théorèmes II.9 et II.11 : stabilité absolue des H-systèmes différentiels II.27

d - Corollaire du théorème II.10 : Stabilité uniforme des H-systèmes différentiels II.28

D - Exemples II.29

1°) Exemple I II.29

2°) Exemple II..... II.30

3°) Exemple III II.35

4°) Exemple IV II.40

Chapitre III - DEFINITION ET ETUDE DE LA STABILITE DES K-SYSTEMES DIFFERENTIELS

A - K - Systèmes différentiels non autonomes III.1

1°) Hypothèses - Définitions et propriétés III.1

a - K-systèmes différentiels forts III.1

b - K-systèmes différentiels faibles III.2

2°) Fonctions de LIAPOUNOV quadratiques associées aux K-systèmes différentiels III.3

3°) Stabilité absolue et stabilité uniforme des K-systèmes différentiels III.5

a - Stabilité absolue des K-systèmes différentiels forts III.5

b - Stabilité uniforme des K-systèmes différentiels faibles III.6

Pages

B - K-systèmes différentiels autonomes - Résumé des résultats III.7

1°) Hypothèses - définitions III.7

a - K-systèmes différentiels forts III.7

b - K-systèmes différentiels faibles III.7

2°) Fonctions de LIAPOUNOV quadratiques associées aux K-systèmes différentiels III.8

3°) Stabilité absolue et stabilité uniforme des K-systèmes différentiels III.8

a - Stabilité absolue des K-systèmes différentiels forts III.8

b - Stabilité uniforme des K-systèmes différentiels faibles III.9

C - Problème réciproque III.10

1°) Position du problème III.10

2°) Systèmes différentiels non autonomes III.10

a - Systèmes linéaires III.10

b - Systèmes non linéaires III.12

3°) Systèmes différentiels autonomes III.13

D - Un cas particulier de K-systèmes différentiels : les H-systèmes différentiels III.14

1°) H-systèmes différentiels et K-systèmes différentiels non autonomes III.14

2°) H-systèmes différentiels et K-systèmes différentiels autonomes III.16

E - Existence et unicité des solutions des K-systèmes différentiels III.17

1°) Existence et unicité des solutions des K-systèmes différentiels III.17

2°) Cas particulier. Existence et unicité des solutions d'un H-système différentiel III.20

Pages

F - Exemples III.21

1°) Exemple I : systèmes linéaires à coefficients constants .. III.21

2°) Exemple II III.23

3°) Exemple III III.25

4°) Exemple IV III.27

5°) Exemple V III.29

6°) Exemple VI III.31

G - Perturbation des K-systèmes différentiels III.32

1°) Application du premier théorème de BELLMAN à un K-système linéaire faible III.32

2°) Analogue du deuxième théorème de BELLMAN III.32

3°) Analogue du théorème de POINCARE-LIAPOUNOV et extension au cas non linéaire III.34

CONCLUSION

Annexe I : Notion de norme vectorielle

Annexe II : Z-matrice et M-matrice

Annexe III : Principales notations utilisées

Bibliographie

INTRODUCTION

La théorie de la stabilité présente un intérêt capital lors de l'étude de la plupart des systèmes différentiels, aussi constitue t'elle depuis de nombreuses années, l'un des chapitres les plus importants de la mécanique non linéaire.

A.M. LIAPOUNOV (*) a été à l'origine des progrès sur ce sujet, en établissant notamment le théorème suivant :

Le point critique d'une équation différentielle est stable, si et seulement si, il existe une fonction auxiliaire positive, dont la dérivée temporelle est négative le long des trajectoires.

Ce résultat est intéressant par son caractère général, la méthode n'étant toutefois pas applicable, pour ainsi dire de manière automatique, dans tous les cas rencontrés. En effet, des procédés généraux de construction des fonctions de LIAPOUNOV n'existent pas ; celles-ci sont habituellement déterminées de manière empirique et demandent souvent beaucoup d'efforts pour être mises en oeuvre sous la forme où elles donnent les meilleurs renseignements.

Si l'on considère un problème de conditions initiales de la forme :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

il est intéressant de mettre en évidence des classes de second membre possédant des propriétés telles que l'on soit systématiquement assuré, d'une part de l'existence d'une fonction de LIAPOUNOV, d'autre part de la possibilité de construire celle-ci.

(*) *A.M. LIAPOUNOV Problème général de la stabilité du mouvement. Ann. Fac. Sc. TOULOUSE, 9, (1907) - 203-474.*

La présente étude essaie d'apporter une contribution au problème précédent, en se plaçant dans un cadre liant les notions de monotonie et de fonction de LIAPOUNOV.

Nous allons voir sur l'exemple simple d'un système différentiel à coefficients constants les idées maîtresses qui ont inspiré notre travail ; soit :

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax$$

un tel système où A est l'opposé d'une M-matrice B. On sait alors ({4} et {5}) que les parties réelles des valeurs propres de B sont positives ; donc (2) est un système différentiel linéaire asymptotiquement stable. De plus, le théorème de TARTAR {19} nous permet d'affirmer qu'il existe une matrice constante K, diagonale et à coefficients strictement positifs, telle que :

$$(3) \qquad \langle Bx, Kx \rangle \geqslant 0 \qquad \text{quelque soit } x.$$

Considérons la fonction :

$$V(x) = \langle x, Kx \rangle \quad ;$$

elle est strictement positive pour tout x différent de zéro ; sa dérivée par rapport à t, calculée le long des trajectoires de (2) est majorée comme suit :

$$\frac{dV(x)}{dt} = -2 \langle Bx, Kx \rangle \leqslant 0 \quad ;$$

donc V(x) est une fonction de LIAPOUNOV pour (2).

Cet exemple a guidé ce travail dans deux directions pour l'étude du cas général où le système est de la forme (1) :

1°) tout d'abord, on associe au système différentiel (1) un système linéaire majorant du type (2) en utilisant une notion particulière de minorante ; ceci nous conduit à définir les H-systèmes différentiels.

2°) en second lieu, on introduit une notion de monotonie plus générale, du type (3), dans laquelle K n'est plus forcément une matrice diagonale, mais une matrice symétrique, définie positive ; nous définissons alors les K-systèmes différentiels.

Le présent mémoire se subdivise en trois chapitres :

Le chapitre I est consacré à un bref rappel de la théorie classique de la stabilité au sens de LIAPOUNOV.

Au chapitre II, intitulé : "Définition et étude de la stabilité des H-systèmes différentiels", on définit et caractérise la classe des H-systèmes différentiels, systèmes généraux de la forme (1). On étend à ces derniers la notion de pseudo-majorante introduite par J.C. GENTINA, P. BORNE, et F. LAURENT {7} pour l'étude de la stabilité asymptotique des solutions d'un système différentiel de la forme :

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t,x).x$$

où A(t,x) est une matrice fonction non linéaire de t et x.
On montre également que cette notion est équivalente au concept de M-V-minorante proposée par J.C. MIELLOU({14} et {15}) pour l'étude numérique de problèmes d'inéquations variationnelles. Nous construisons ensuite deux fonctions de LIAPOUNOV et en déduisons des conditions suffisantes de stabilité absolue des solutions. Il est à noter que, dans ce chapitre, l'utilisation de normes vectorielles combinée avec un découpage en espaces produits, nous permet d'aborder l'étude de grands systèmes différentiels décentralisés.

La notion de H-système différentiel entre, en fait, dans un cadre plus général, proposé par P. HARTMANN {10} , pour l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un système différentiel non linéaire ; toutefois, le travail de ce dernier ne permet pas d'établir des critères pratiques de stabilité. Aussi, au chapitre III, on introduit une classe de problèmes intermédiaire entre celle proposée au chapitre II et celle de HARTMANN ; la classe des K-systèmes différentiels qui admet une fonction de LIAPOUNOV quadratique et possède des propriétés de stabilité absolue.

Par ailleurs, l'ensemble des notions introduites entre dans le cadre général de {10} auquel nous renvoyons pour l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de ces systèmes différentiels.

Enfin, dans le cadre de perturbations de K-systèmes différentiels, nos résultats conduisent à une formulation équivalente du deuxième théorème de BELLMAN, du théorème de POINCARE-LIAPOUNOV, ainsi qu'à une extension de ce dernier au cas non linéaire.

CHAPITRE I

THEORIE CLASSIQUE DE LA STABILITE AU SENS DE LIAPOUNOV DES SOLUTIONS DE SYSTEMES DIFFERENTIELS ORDINAIRES

A - Introduction et définitions

1°) Généralités

Soit E un espace de HILBERT sur $\mathbb{R}$; on note $<,>$ le produit scalaire défini sur E et $\|\ \ \|$ la norme euclidienne associée.

Soit $I = \{t_o, T\}$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E.

On considère l'application non linéaire, continue, bornée par rapport à $(t, x) \varepsilon\ I \times U$ et lipschitzienne par rapport à x pour $t \varepsilon I$

$$f\ (t,x) : I \times U \longrightarrow E$$

et on lui associe le problème suivant : trouver une application $x(t) \subset U$ continue et dérivable pour tout $t \varepsilon I$ telle que :

$$\text{(A-1-1)} \qquad \frac{dx}{dt} = f\ (t,x)$$

et vérifiant de plus :

$$x(t_o) = x_o \qquad\qquad x_o \ \varepsilon\ U$$

où x_o est donné. On note $x(t, x_o)$ une telle solution et on montre, sous ces hypothèses, l'existence et l'unicité de $x(t, x_o)$ (cf. par exemple {2}).

On dira que (A-1-1) est un système d'équations différentielles ordinaires non autonome ; si l'application f ne dépend pas explicitement de la variable t on dira que c'est un système d'équations différentielles ordinaires autonome.

2°) Définition de la stabilité au sens de LIAPOUNOV

On suppose qu'il existe un nombre δ positif, tel que deux solutions de (A-1-1), notées $x(t,x_o)$ et $y\ (t,y_o)$, existent pour $t \geq t_o$ lorsque les conditions initiales vérifient :

$$\|x_o - y_o\| \leq \delta \quad .$$

Définition I-1

La solution $x(t,x_o)$ est dite stable au sens de LIAPOUNOV si étant donné le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif

$$\eta = \eta(\varepsilon, t_o)$$

tel que si, pour tout $y_o \in U$, on ait :

$$\|y_o - x_o\| \leq \eta \leq \delta$$

alors : $$\|y(t,y_o) - x(t,x_o)\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq t_o \quad t \in I.$$

Définition I-2

La solution $x(t, x_o)$ est dite asymptotiquement stable si :

1°) Elle est stable

2°) Il existe un nombre positif $\eta = \eta(t_o)$ tel que si, pour tout $y_o \in U$, on a :

$$\|y_o - x_o\| \leq \eta \leq \delta$$

alors $$\lim_{t \to \infty} (\|y(t, y_o) - x(t,x_o)\|) = 0$$

Définition I-3

La solution $x(t, x_o)$ est dite uniformément stable, si, étant donné le nombre ε positif, il existe une fonction positive :

$$\eta = \eta(\varepsilon)$$

telle que si, pour toutes valeurs de $t_o \in I$ et pour toutes valeurs de $y_o \in U$ on a :

$$\|y_o - x_o\| \leq \eta \leq \delta$$

alors : $$\|y(t, y_o) - x(t, x_o)\| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, une solution $x(t, x_o)$ sera uniformément stable, si elle est stable quelque soit les conditions initiales choisies dans $U \times I$.

Définition I- 4

La solution $x(t, x_0)$ est dite absolument stable s'il existe un nombre η positif tel que, pour toutes valeurs de $t_0 \varepsilon I$ et pour toutes valeurs de $y_0 \varepsilon U$ satisfaisant la condition :

$$\|y_0 - x_0\| \leq \eta \leq \delta$$

alors on ait :

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t, y_0) - x(t, x_0)\| = 0$$

uniformément en t_0 et y_0.

Ici aussi, nous pouvons formuler cette définition de manière plus intuitive en disant que $x(t, x_0)$ est absolument stable si elle est asymptotiquement stable quelque soit les conditions initiales dans U.

Définition I-5

La solution $x(t, x_0)$ est dite instable si elle n'est pas stable.

Remarques

1 - Pour simplifier la rédaction, nous conviendrons d'écrire dans la suite du texte "solution stable" au lieu de "solution stable au sens de LIAPOUNOV".

2 - Il existe bien d'autres définitions de stabilité concernant quelques propriétés spéciales de trajectoires ; nous n'aurons pas besoin de ces notions dans la suite de ce travail.

3 - La notion de stabilité est sans ambiguité pour un système différentiel linéaire ; en effet, lorsqu'un tel système possède une solution stable (respectivement asymptotiquement stable ... etc ...), une perturbation momentanée, de la solution, de quelque importance, donne naissance à une réponse transitoire amortie.

La stabilité est donc une propriété intrinsèque du système et on parlera de la stabilité d'un système linéaire. Par contre, pour un problème non linéaire, on ne peut plus parler que de la stabilité d'une solution.

B - Etude locale de la stabilité

L'étude locale de la stabilité a été mise au point par deux éminents mathématiciens, indépendamment l'un de l'autre, et à abouti à ce que l'un, H. POINCARE, désigne sous le nom d'équations aux variations, et l'autre, LIAPOUNOV, appelle la première méthode.

Nous allons exposer ci-dessous l'essentiel de cette étude.

1°) Equations aux variations

Soit le système différentiel

$$\text{(B-1-1)} \qquad \frac{dx}{dt} = f\ (t,\ x)$$

où $f(t,x)$ vérifie les hypothèses énoncées au paragraphe (I-A-1). Nous supposons connaître une solution $x(t,\ x_o)$ de (B-1-1) que nous appelons la solution non perturbée et dont nous voulons étudier la stabilité ; en outre, il existe une autre solution, la solution perturbée, $y\ (t,\ y_o)$ ces deux solutions vérifiant la condition suivante :

$$\|x_o - y_o\| \leq \eta$$

Entre ces deux solutions existe la relation :

$$\text{(B-1-2)} \qquad y\ (t,\ y_o) = x\ (t,\ x_o) + \xi(t)$$

où $\xi\ (t)$ est la perturbation apportée à la solution $x(t,\ x_o)$; nous ferons l'hypothèse que $\|\xi(t)\|$ est petite.

Remplaçons (B-1-2) dans (B-1-1) et développons la fonction $f(t,x)$ en série autour de la solution non perturbée, on obtient le système suivant :

$$\text{(B-1-3)} \qquad \frac{d\xi\ (t)}{dt} = A(t).\ \xi(t) + R\ (x,\ \xi\ ,\ t)$$

où $A(t)$ est la matrice jacobienne de $f(t,x)$ calculée pour la solution $x(t,x_o)$ $R\ (x,\ \xi\ ,t)$ est une fonction comportant les termes d'ordre supérieur en $\xi(t)$

du développement de TAYLOR de $f(t,x)$ et, compte tenu des hypothèses faites, on vérifie que :

$$\lim_{\|\xi(t)\| \to 0} \|R(x,\xi, t)\| = 0.$$

Définition I-6

Le système linéaire

$$\frac{d\,\xi(t)}{dt} = A(t) \quad \xi(t)$$

s'appelle système d'équations aux variations.

La solution du système aux variations permet de se rendre compte de la nature du mouvement perturbé :

- si $\xi(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$ la solution perturbée $y\ (t,\ y_o)$ s'approche de la solution non perturbée $x(t,\ x_o)$. Dans ce cas il est facile de se rendre compte que la solution non perturbée est stable (et même asymptotiquement stable)

- dans le cas contraire, la solution non perturbée est instable. Un critère de stabilité est fourni par le théorème de POINCARE-LIAPOUNOV.

2°) *Théorème de POINCARE-LIAPOUNOV*

Théorème I-1

Soit le système différentiel

$$(3\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{d\,\xi(t)}{dt} = A(t).\ \ \xi(t) + R\ (x,\xi,t)$$

où $A(t)$ est une matrice carrée d'ordre n dépendant en général du temps.

$R(x,\xi,t)$ est une fonction continue de ses arguments (x désigne un ensemble de paramètres) telle que :

- *$R(x,\xi,t)$ soit lipschitzienne par rapport à ξ*

$$\|R(x,\xi,t) - R(x,\ \xi',t)\| \leq L\ \|\xi - \xi'\|$$

- $R(x, \xi, t)$ vérifie de plus :

$$\lim_{\xi(t) \to 0} \frac{\|R(x,\xi,t)\|}{\|\xi(t)\|} = 0$$ *uniformément par rapport à t et à x.*

Sous ces hypothèses, si les solutions du système linéaire homogène associé à **(B-2-1)** *sont asymptotiquement stables par rapport à la solution $x(t,0) \equiv 0$, il en sera de même des solutions du système* **(B-2-1)**

3°) Remarques

L'étude de la stabilité locale qui vient d'être envisagée ne garantit, en fait, que la stabilité d'une position d'équilibre sans déterminer le domaine de stabilité pour le système.

Une position d'équilibre stable possède un certain domaine U d'attraction tel que toute condition initiale prise dans U donne une trajectoire qui tende vers un voisinage de la position d'équilibre. Le problème pratique qui se posera sera donc celui de définir le plus grand domaine U de "l'espace des phases E", tel que toutes les solutions qui y sont contenues soient uniformément (ou même absolument) stables.

La seconde méthode de LIAPOUNOV permettra de résoudre ce dernier problème.

C - Etude de la stabilité glo ale

L'étude globale de la stabilité, étudiée par LIAPOUNOV, est connue sous le nom de "seconde méthode". L'idée de base de la méthode directe est de donner une généralisation du théorème de LEJEUNE-DIRICHLET en étudiant la stabilité à partir de la détermination de fonctions dépendant de x (et éventuellement de t pour un système non autonome) et ayant des propriétés particulières ; ces fonctions sont appelées fonctions de LIAPOUNOV.

On distinguera le cas des systèmes autonomes de celui des systèmes non autonomes.

1°) Cas des systèmes autonomes

Définition I-7

Une fonction $V(x,y)$ est dite définie positive si :

- *$V(x,y)$ ainsi que ses dérivées partielles premières au sens de FRECHET sont continues dans un certain domaine ouvert $U \times U \subset E \times E$*
- *$V(x,y) > 0$ et $V(x,x) = 0$ $\quad \forall\, x,y \in U \times U \qquad x \neq y$*

Autrement dit V(x,y) est une fonction positive qui s'annule, au point x = y qui est un minimum isolé de V.

Définition I-8

On appelle dérivée eulérienne de la fonction $V(x, y)$ la dérivée par rapport à t prise le long de la trajectoire du système :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

On aura donc :

$$\frac{dV}{dt} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial y}, f(y) \right\rangle$$

Définition I-9

$V(x,y)$ est dite *fonction de LIAPOUNOV* associée au système différentiel autonome si :

- $V(x,y)$ est définie positive sur un certain domaine $U \times U$
- $\frac{dV}{dt} \leq 0$ pour tout $x, y \in U \times U$

Théorème I-2

Soit le système différentiel autonome

$$(C\text{-}1\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

admettant $x = x\ (t, x_0)$ comme solution particulière.

1°) Si dans un certain voisinage U de $x\ (t, x_0)$, il existe une fonction de LIAPOUNOV $V(x,y)$, où $y = y\ (t, y_0)$ est solution de (C-1-1), alors $x\ (t, x_0)$ est une solution stable, et même uniformément stable.

2°) Si, de plus, $-\frac{dV}{dt}$ est aussi définie positive sur $U \times U$ alors $x(t,x_0)$ est asymptotiquement stable, et même absolument stable.

2°) *Cas des systèmes non autonomes*

Définition I-10

Soit $W(x,y)$ une fonction définie positive.

La fonction $V(t,x,y)$ est définie positive si :

- *$V(t,x,y)$ est définie, continue dans un certain domaine $I \quad U \times U$*
- *$V(t,x,y) \geq W(x,y) \quad \forall t,x,y \in I \times U \times U \qquad x \neq y$*
- *$V(t,x,x) = 0$*

La dérivée eulérienne de la fonction $V(t,x,y)$ prise le long d'une trajectoire $x(t,x_0)$ du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

s'écrira :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial y}, f(t,y) \right\rangle$$

Définition I-11

On dit que $V(t,x,y)$ est uniformément petite, s'il existe une fonction définie positive $W'(x,y)$ telle que :

$$V(t,x,y) \leq W'(x,y) \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

On trouve dans la bibliographie une définition équivalente : la fonction $V(t,x,y)$ est uniformément petite si

$$\lim_{\|x-y\| \to 0} V(t,x,y) = 0 \qquad \text{uniformément par rapport à } t.$$

Définition I-12

$V(t,x,y)$ est fonction de LIAPOUNOV associée au système différentiel non autonome si :

- *$V(t,x,y)$ est définie positive* $\forall\, t,x,y \in I \times U \times U$

- $-\dfrac{dV}{dt} \leq 0$.

Théorème I-3

Soit le système différentiel non autonome :

$$(C\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

et $x(t,x_o)$ une solution.

1°) *S'il existe dans un certain voisinage U de $x(t,x_o)$ une fonction de LIAPOUNOV $V(t,x,y)$ où $y(t,y_o)$ est une solution de (C-2-1), alors $x(t,x_o)$ est une solution stable.*

2°) *Si, de plus, $V(t,x,y)$ est infiniment petite, alors $x(t,x_o)$ est uniformément stable.*

3°) *Enfin, si de plus, $-\dfrac{dV}{dt}$ est définie positive, la solution $x\,(t,x_o)$ est absolument stable.*

CHAPITRE II

DEFINITION ET ETUDE DE LA STABILITE DES H-SYSTEMES DIFFERENTIELS.

A - Introduction et définitions

1°) Généralités

Soit n un entier naturel et $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Soit $\{E_i\}$ un ensemble d'espaces de HILBERT sur le corps des réels $\mathbb{R}$, munis du produit scalaire noté $< , >_i$ et de la norme scalaire euclicléenne associée :

$$\|x_i\|_i = (<x_i, x_i>_i)^{1/2} \qquad \forall x_i \in E_i .$$

On note E l'espace produit (fini) d'espaces de HILBERT $E_1,\ldots,E_n$:

$$E = E_1 \times \ldots \times E_n$$

et on muni E :

1°) de la norme vectorielle p(x) définie comme suit :

$$\forall x \in E,\ p(x) = \{p_1(x),\ldots,p_i(x),\ldots,p_n(x)\}$$

où :

$$p_i(x) = \left\|\Pi_i x\right\|_i = \|x_i\|_i$$

Π_i étant l'opérateur de projection orthogonal de E dans E_i.

2°) du produit scalaire noté $< \ , \ >$ et défini comme suit :

$$<x,y> = x^t.y \qquad \forall x,y \in E.$$

On associe à ce produit scalaire la norme scalaire euclidienne :

$$\left\|x\right\| = (<x, x>)^{1/2} \qquad \forall x \in E.$$

Remarque :

On vérifie, facilement, que l'application :

$$x \longrightarrow p(x)$$

vérifie bien les propriétés 1), 2), 3) citées en Annexe I.

Enfin, $I = \{t_o, T\}$ désigne un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E.

2°) Notion de majorante linéaire d'une application non linéaire relativement à une norme vectorielle p.

Définition II-1

Etant donné l'application :

$$f(t,x) : I \times U \longrightarrow E,$$

nous dirons que T, matrice à n lignes et à n colonnes, est une majorante linéaire de f, relativement à la norme vectorielle p, si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(A\text{-}2\text{-}1) \quad p(f(t,x) - f(t,y)) \leq T\, p(x-y) \qquad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U .$$

Proposition II-1

Toute application f(t,x) admettant, sur un intervalle I X U, une majorante linéaire T relativement à la norme vectorielle p, est continue sur I X U.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier que, dans ces conditions, f(t,x) est lipschitzienne par rapport à x. Nous renvoyons à J.C. MIELLOU {14} .

B - H-systèmes différentiels non autonomes

1°) Généralités

On considère l'application $f(t,x)$ continue, bornée par rapport à $(t,x) \in I \times U$ et lipschitzienne par rapport à x, pour tout $t \in I$, de constante de LIPSCHITZ L :

$$(B\text{-}1\text{-}1)\begin{cases} f(t,x) : I \times U \longrightarrow E \\ \|f(t,x)\| \leq C \qquad \forall t,\ x \in I \times U \\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \quad \|x-y\| \quad \forall t,x,y \in I \times U \times U, \end{cases}$$

associée au système différentiel non autonome

$$(B\text{-}1\text{-}2) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x) \ .$$

2°) Notion de pseudo-majorante linéaire, associée à un système différentiel ordinaire non linéaire, relativement à une norme vectorielle p. Définition des H-systèmes différentiels non autonomes

Nous rappelons la notion de pseudo-majorante linéaire relative à un système différentiel ordinaire (cf. {7}).

Définition II-2

La matrice à n lignes et n colonnes $M\{f,t,x,y\}$ est une pseudo-majorante linéaire de l'application (B-1-1), sur $I \times U$, relativement à la norme vectorielle p, si elle vérifie :

$$(B\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{dp\ (x-y)}{dt} \leq M\{f,t,x,y\}\ .p(x-y) \quad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U.$$

Définition II-3

Nous dirons que le système d'équations différentielles ordinaires (B-1-2) est un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, si l'application $f(t,x)$ admet comme pseudo-majorante sur $I \times U$,

relativement à cette norme, l'opposée d'une M-matrice.

L'expression analytique de cette définition est fournie par l'inégalité suivante :

$$\text{(B-2-2)} \quad \frac{dp\ (x-y)}{dt} + M\{f,t,x,y\}\ p(x-y) \leq 0 \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

où M $\{f,t,x,y\}$ est une M-matrice (cf. Annexe 2).

3°) Application H-monotones

Définition II-4

Une application non linéaire :

$$f(t,x) : I \times U \longrightarrow E$$

est dite H-monotone, s'il existe une M-matrice $N(t)$ de coefficients $n_{ij}(t)$ telle que :

$$\text{(B-3-1)} \quad \langle f_i(t,x) - f_i(t,y),\ x_i - y_i \rangle_i \geq \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(t)\ \|x_i - y_i\|_i\ \|x_j - y_j\|_j$$

$$\forall t,x,y \in I \times U \times U$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ .$$

a - Caractérisation des applications H-monotones linéaires

Soit $A(t)$ une matrice carrée, fonction continue de la variable t sur I ; posons :

$$\text{(B-3-2)} \quad a(t,x,y) = \langle A(t).\ x,\ y \rangle$$

Proposition II-2

$a(t,x,y)$ est une forme bilinéaire, bornée et continue en x et y.

Démonstration

En vertu des propriétés du produit scalaire on vérifie aisément

que a (t,x,y) est bilinéaire par rapport à x et y. De plus, on a :

$$|a(t,x,y)| = |\langle A(t).x,y\rangle| \leq \|A(t)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

Donc a (t,x,y) est bornée et continue en x et y.

Considérons un partitionement en bloc de la matrice $A(t)$ défini comme suit :

$$\text{(B-3-3)} \qquad A_{ij}(t) = \Pi_i . A(t) . \Pi_j$$

où $\qquad A_{ij} \in \mathcal{L}(E_i, E_j)$,

on aura alors :

$$\text{(B-3-4)} \qquad a(t,x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j, y_i \rangle_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i.}(t,x,y_i)$$

où

$$a_{i.}(t,x,y_i) = a_{i.}(t, x, \Pi_i y) = \langle \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j, y_i \rangle_i$$

Nous conviendrons, également, de noter $\tilde{\Pi}_j$ l'opérateur de projection orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur le $j^{\text{ème}}$ axe ; nous pouvons, alors, énoncer les définitions suivantes :

Définition II-5

On dira que la forme bilinéaire $\langle N(t).p(x),p(x)\rangle$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, associée à la matrice $N(t)$ de coefficients n_{ij}, est une minorante vectorielle de la forme $a(t,x,y)$, relativement à la norme vectorielle p, si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{(B-3-5)} \qquad a(t,x, \Pi_i x) \geq \langle N(t).\, p(x), \tilde{\Pi}_i\, p(x) \rangle$$

$$\forall t, x \in I \times U, \qquad \forall i \in \{1;\ldots,n\}.$$

Remarque :

On peut énoncer la condition (B-3-5), de façon équivalente, comme suit :

$$a_{i.}(t,x,x_i) \geq \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(t).\|x_i\|_i . \|x_j\|_j \qquad \forall t,\ x \in I \times U \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Définition II-6

Toute matrice $N(t)$ vérifiant la condition (B-3-5) sera appelée V-minorante de $a(t,x,y)$ relativement à la norme vectorielle p.

Définition II-7

Toute V-minorante de $a(t,x,y)$ qui est une Z-matrice sera appelée une Z-V-minorante relativement à la norme vectorielle p.

Définition II-8

Toute Z-V-minorante de $a(t,x,y)$ qui est une M-matrice sera appelée une M-V-minorante relativement à la norme vectorielle p.

Proposition II-3

Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme bilinéaire $a(t,x,y)$ admette une Z-V-minorante $N(t)$ de coefficients n_{ij} est que :

$$\text{(B-3-6)} \qquad \langle A_{ii}(t).x_i,x_i\rangle_i \geq n_{ii}(t).\|x_i\|_i^2$$

$$\text{(B-3-7)} \qquad |\langle A_{ij}(t).x_i,x_j\rangle_j| \leq -n_{ij}(t).\|x_i\|_i.\|x_j\|_j \qquad i \neq j$$

$$\forall t \in I \quad , \quad \forall x_i \in E_i, \quad \forall x_j \in E_j, \qquad \forall i, j \in \{1,\dots,n\}$$

Pour une démonstration de cette proposition, nous renvoyons à J.C. MIELLOU {14} .

Remarques

1 - Dans la suite nous supposerons que les conditions (B-3-6) et (B-3-7) sont toujours vérifiées.

2 - Soit $a(t,x,y)$ une forme bilinéaire bornée sur $I \times U \times U$ et admettant une Z-V-minorante. Notons :

$$\}\langle x_i, y_i \rangle_i \{_i = \frac{\langle A_{ii}(t)\, x_i, y_i \rangle_i + \langle A_{ii}(t).\, y_i, x_i \rangle_i}{2}$$

$$\forall t \in I, \quad \forall x_i, y_i \in E_i \times E_i \quad , \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Puisque $a(t,x,y)$ est bornée et admet une Z-V-minorante on vérifie que $\}\langle\ ,\ \rangle_i \{_i$ est un produit scalaire sur E_i dont la norme scalaire associée et notée $\}|\ |\{_i$ est strictement équivalente à la norme scalaire notée $\|\ \|_i$ de E_i.

Soit $q(x)$ la norme vectorielle ainsi définie :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = \{q_1(x),\dots,q_i(x),\dots,q_n(x)\}$$

avec $\quad q_i(x) = \ \}|x_i|\{_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Proposition II-4

$q(x)$ est une norme vectorielle strictement équivalente à $p(x)$.

Soit, maintenant :

$$n_{ij}(t) = - \sup_{\substack{\}|y_j|\{_j = 1 \\ \}|x_i|\{_i = 1}} |\langle A_{ij}(t).x_i,\ y_j \rangle_j| ,$$

et soit, également, $\tilde{N}(t)$ la matrice de coefficients diagonaux égaux à 1 et de coefficients hors diagonaux $\tilde{n}_{ij}(t)$. Nous sommes, à présent, en mesure de caractériser des applications H-monotones linéaires.

Proposition II-5

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une norme vectorielle $\bar{p}$ sur E, strictement équivalente à p, telle que relativement à $\bar{p}$, $a(t,x,y)$ admette une M-V-minorante, est qu'il existe une M-matr

$\tilde{N}(t)$ de coefficients diagonaux égaux à 1, telle que $\tilde{N}(t)$ soit une M-V- minorante de $a(t,x,y)$ relativement à la norme vectorielle q.

Pour une démonstration, nous renvoyons à J.C. MIELLOU {13} et {14}

3 - Caractérisation des applications H-monotones non linéaires

nous donnons la proposition suivante :

Proposition II-6

Soit $f(t,x)$ une application non linéaire de $I \times U$ dans E, continuement différentiable au sens de FRECHET par rapport à x sur U et soit $f'(t,x)$ sa dérivée au point x de U.

On suppose, de plus, vérifiée la condition de HOLDER, à savoir :

$$\exists\, c \geq 0 \quad , \quad p > 0 \quad \text{tels que :}$$

$$\|f'(t,x) - f'(t,y)\| \leq c \quad \|x-y\|^p \quad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U$$

Sous ces hypothèses, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit H-monotone sur U est qu'il existe une M-matrice $N(t)$ telle que $f'(t,x)$ admette $N(t)$ pour M-V-minorante pour tout t, $x \in I \times U$.

Pour une démonstration nous renvoyons à MIELLOU J.C. {13} et {15}

4°) Relation entre les notions de H-systèmes différentiels et de H-monotonie ; caractérisation des H-systèmes différentiels

Proposition II-7

Soit le système d'équations différentielles ordinaires non autonome :

$$(B-G-1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

Si l'application $-f(t,x)$ est H-monotone sur $I \times U$, $M\{f,t,x,y\}$ étant la

M-V-minorante associée relativement à la norme vectorielle p, alors (B-4-1) est un H-système différentiel sur I X U, relativement à la norme vectoriel p.

Démonstration

Soient $x = x(t,x_o)$ et $y = y(t,y_o)$ deux solutions de (B-4-1) satisfaisant la condition suivante :

$$\|x_o - y_o\| \leq \delta$$

On peut écrire :

$$\frac{d\,(x-y)}{dt} = f(t,x) - f(t,y)$$

ou encore :

$$\text{(B-4-2)} \quad \frac{d\,(x_i-y_i)}{dt} = f_i(t,x) - f_i(t,y) \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}.$$

Multiplions scalairement par $(x_i - y_i)$, il vient :

$$\text{(B-4-3)} \quad \left\langle \frac{d\,(x_i-y_i)}{dt}, x_i - y_i \right\rangle_i + \langle -(f_i(t,x)-f_i(t,y)), x_i-y_i\rangle_i = 0$$

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$$

Or, par hypothèse, l'application $-f(t,x)$ étant H-monotone sur $I \times U$, on peut écrire :

$$\langle -(f_i(t,x)-f_i(t,y)), x_i-y_i\rangle_i \geq \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t)\,\|x_i-y_i\|_i \cdot \|x_j-y_j\|_j$$

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}.$$

Soit en remplaçant dans (B-4-3), il vient :

$$\text{(B-4-4)} \quad \left\langle \frac{d(x_i-y_i)}{dt}, (x_i-y_i)\right\rangle_i + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t)\,\|x_j-y_j\|_j \cdot \|x_i-y_i\|_i \leq 0$$

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$$

Comme :

$$\frac{d\,\|x_i-y_i\|_i^2}{dt} = \frac{d}{dt}\{<(x_i-y_i),\ x_i-y_i>_i\} = 2<\frac{d(x_i-y_i)}{dt},\ x_i-y_i>_i$$

on a :

$$(B\text{-}4\text{-}5)\quad <\frac{d\,(x_i-y_i)}{dt},\ x_i-y_i>_i = \frac{d\,\|x_i-y_i\|_i}{dt}\ \|x_i-y_i\|_i$$

Reportons cette dernière égalité dans (B-4-4), nous obtenons :

$$\left[\frac{d\,\|x_i-y_i\|_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t).\ \|x_j-y_j\|_j\right].\ \|x_i-y_i\|_i \leq 0$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Cette dernière égalité, ne pouvant avoir lieu que si :

$$\frac{d\,\|x_i-y_i\|_i}{dt} \leq -\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t).\ \|x_j-y_j\|_j \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

ce que nous pouvons écrire, d'une manière condensée, comme suit :

$$\frac{dp\,(x-y)}{dt} + M\,\{f,t,x,y\}\ \ p(x-y) \leq 0 \qquad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U$$

où M {f,t,x,y} est une M-matrice ; donc (B-4-1) est bien un H-système différentiel et la proposition est démontrée.

<u>Remarque</u> :

Etant donné le système différentiel non linéaire et non autonome

$$(B\text{-}4\text{-}6)\qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

nous venons d'établir que, si l'application $-f(t,x)$ est H-monotone sur le domaine $I \times U$, relativement à la norme vectorielle p, alors le système

(B-4-6) est un H-système différentiel relativement à cette même norme vectorielle.

Inversement, nous nous posons le problème suivant : étant donné un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, l'application :

$$- f(t,x) : I \times U \longrightarrow E$$

est-elle H-monotone sur $I \times U$ relativement à la norme vectorielle p ?
Nous établissons la proposition suivante :

Proposition II-8

Soit

$$(B\text{-}4\text{-}7) \qquad \frac{dx}{dt} = f\ (t,x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur le domaine $I \times U$.

Alors l'application $- f(t,x)$ est H-monotone relativement à la norme vectorielle p, sur $I \times U$.

Démonstration

Le système (B-4-7) étant un H-système, on a :

$$\frac{d\,\|x_i-y_i\|_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f,t,x,y).\,\|x_j-y_j\|_j \leq 0 \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

où les $m_{ij}(f,t,x,y)$ sont les coefficients d'une M- matrice, notée $M\{f,t,x,y\}$.

Multiplions chacune des inégalités précédentes par $\|x_i-y_i\|_i$ il vient compte-tenu de (B-4-5) :

$$\left\langle \frac{d(x_i-y_i)}{dt}, x_i-y_i \right\rangle_i + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t).\,\|x_j-y_j\|_j\,\|x_i-y_i\|_i \leq 0 \qquad \forall_i = 1,\dots,n$$

Or

$$< \frac{d(x_i-y_i)}{dt} , x_i-y_i>_i = <f_i(t,x)-f_i(t,y), x_i-y_i>_i \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Il vient donc

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f,t,x,y) . \|x_j-y_j\|_j \|x_i-y_i\|_i \leq <-(f_i(t,x)-f_i(t,y)),x_i-y_i>_i$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}$$

et la proposition est démontrée.

Nous pouvons résumer les propositions II-7 et II-8 par le théorème suivant :

Théorème II-1

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système différentiel non autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

soit un H-système différentiel, sur I X U, relativement à la norme vectorielle p, est que l'application

$$-f(t,x) \quad : I \times U \longrightarrow E$$

soit H-monotone, sur I X U, relativement à cette même norme vectorielle. La M-V-minorante est également pseudo-majorante relativement à la norme vectorielle p.

5°) Etude de la stabilité des H-systèmes différentiels non autonomes

a - Première fonction de LIAPOUNOV : fonction de LIAPOUNOV quadratique

Théorème II-2

Soit

(B-5-1) $$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, sur I X U

Soit M {f,t,x,y} la M-V-minorante, associée à l'application H-monotone - f(t,x), relativement à la norme vectorielle p.

Soit K(t) une matrice diagonale à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$(B\text{-}5\text{-}2) \quad \langle M\{f,t,x,y\}.z, K(t).z\rangle \geq \beta \|z\|^2 \qquad \forall\, t,z \in I \times U,$$

où β *est un nombre positif.*

Si l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée :

$$(B\text{-}5\text{-}3) \quad \langle z, \frac{dK}{dt} z\rangle \leq 0 \qquad \forall\, t,z \in I \times U,$$

ou

$$(B\text{-}5\text{-}4) \quad 0 \leq \langle z, \frac{dK}{dt} z\rangle \leq \gamma \|z\|^2 \qquad \forall\, t,z \in I \times U$$

avec

$$(B\text{-}5\text{-}5) \quad \gamma < 2\beta,$$

alors la fonction :

$$(B\text{-}5\text{-}6) \quad V_1(t,x,y) = \langle p(x-y), K(t)\, p\,(x-y)\rangle$$

est une fonction de LIAPOUNOV pour le H-système différentiel (B-5-1) à dérivée eulérienne définie négative sur I X U X U.

Démonstration

M {f,t,x,y} étant une M-matrice, d'après le théorème de TARTAR (cf. {19}), on sait qu'il existe une matrice diagonale K(t))à coefficient strictement positifs, telle que la matrice produit K(t).M {f,t,x,y } vérifi une inégalité du type (B-5-2) ou, autrement dit, qu'elle soit définie positive.

L'existence de la matrice K(t) étant acquise, montrons, maintenant, que $V_1(t,x,y)$ est une fonction de LIAPOUNOV pour le H-système diffé-

rentiel (B-5-1) sur le domaine $I \times U \times U$; nous devons vérifier que :

1°) $V_1(t,x,y)$ est définie positive sur $I \times U \times U$; ceci a bien lieu car $V_1(t,x,y)$ est définie continue sur $I \times U \times U$; de plus

$$p(o) = 0$$

entraine

$$V_1(t,x,x) = \langle p(o), K(t)\, p(o) \rangle = 0 \qquad \forall t,x,x \in I \times U \times U.$$

Enfin la matrice $K(t)$ étant diagonale à coefficients strictement positifs, il en résulte que tous ses mineurs principaux sont positifs donc que $V_1(t,x,y)$ vérifie :

$$V_1(t,x,y) = \langle p(x-y), K(t)\, p(x-y) \rangle \geq \alpha \; \|p(x-y)\|^2$$

$$\forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

2°) $\dfrac{dV_1(t,x,y)}{dt}$ est définie négative sur $I \times U \times U$; en effet on a :

$$\frac{dV_1(t,x,y)}{dt} = 2 \left\langle \frac{dp\,(x-y)}{dt}, K(t).p(x-y) \right\rangle + \left\langle p(x-y), \frac{dK}{dt}\; p(x-y) \right\rangle$$

qui est bien définie, continue sur $I \times U \times U$; de plus on vérifie facilement que :

$$\frac{dV_1\,(t,x,x)}{dt} = 0 \qquad \forall t,x,x \in I \times U \times U.$$

Il nous reste à montrer que si l'une des deux conditions (B-5-3) ou (B-5-4) est vérifie, alors, $\dfrac{dV_1}{dt}$ est majorée par une quantité strictement négative et indépendante de t. Le système (B-5-1) étant un H-système différentiel, l'inégalité suivante est vérifée :

$$\text{(B-5-7)} \quad \frac{dp\,(x-y)}{dt} + M\,\{f,t,x,y\}\; p(x-y) \leq 0 \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

Multiplions scalairement la relatiion précédente par $K(t).p(x-y)$ il vient :

$$< \frac{dp\ (x-y)}{dt}, K(t).p(x-y) > \leq - < M\{f,t,x,y\}\ p(x-y),\ K(t).\ p\ (x-y) >$$

$$\forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

Compte tenu de (B-5-2), on a donc :

$$\text{(B-5-8)} \qquad < \frac{dp\ (x-y)}{dt},\ K(t).p(x-y) > \leq -\ \beta\ \|p(x-y)\|^2$$

$$\forall\ t,x,y \in I \times U \times U.$$

Donc

$$\frac{dV_1\ (t,x,y)}{dt} \leq -2\beta\ \|p(x-y)\|^2 + < p(x-y),\ \frac{dK}{dt}\ p\ (x-y) >$$

$$\forall\ t,x,y \in I \times U \times U.$$

Si la condition (B-5-3) est vérifiée on aura :

$$\frac{dV_1(t,x,y)}{dt} \leq -\ 2\ \beta\ \|p(x-y)\|^2 \qquad \forall\ t,x,y \in I \times U \times U.$$

et $\dfrac{dV_1(t,x,y)}{dt}$ est définie négative sur $I \times U \times U$.

De même, si la condition (B-5-4) est réalisée, la majoration suivante :

$$\frac{dV_1(t,x,y)}{dt} \leq -\ (2\beta-\gamma)\ \|p(x-y)\|^2 \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

où $(2\ \beta-\gamma)$ est un nombre positif, implique que $\dfrac{dV_1(t,x,y)}{dt}$ est définie négative sur $I \times U \times U$.

Théorème II-3

Sous les hypothèses du théorème II-2 la fonction $V_1(t,x,y)$ est uniformément petite.

Démonstration

On étudie la quantité suivante :

$$\lim_{y \to x} V_1(t,x,y) = \lim_{z \to 0} < p(z), K(t).\ p(z) >$$

$$\forall\ t,x,y \in I \times U \times U$$

où

$$z = x - y$$

Compte tenu des propriétés de la norme vectorielle p(z), cette limite est bien nulle, uniformément par rapport à $t \in I$.

Remarque :

On peut donner une démonstration différente du théorème II-3 dan le cas où seule la condition (B-5-3) est vérifiée. En effet, dans ce cas, la matrice K(t) est une fonction décroissante de t sur l'intervalle I ; il existe donc un maximum de K(t) sur I, soit :

$$A = \underset{t \in I}{\mathrm{Max}}\ K(t) = K(t_o)$$

K(t) étant une matrice définie positive sur I, il en sera de même pour A, on aura :

$$\alpha \|p(x-y)\|^2 \leq V_1(t,x,y) \leq <p(x-y)\ ,\ A\ p\ (x-y)> = W\ (x,y)$$

Ce qui achève la démonstration du théorème II-3.

Remarque :

Nous pouvons obtenir des résultats moins forts, mais néanmoins

intéressants, en prenant des hypothèses moins restrictives, à savoir :

1°) (B-5-9) $\begin{cases} \beta = 0 \\ < z, \frac{dK}{dt} z > \leq 0 \qquad \forall t, z \in I \times U \end{cases}$

au lieu des relations (B-5-2) et (B-5-3)

2°) (B-5-10) $\begin{cases} \beta = \frac{\gamma}{2} \\ 0 \leq <z, \frac{dK}{dt} z> \leq \gamma \|z\|^2 \qquad \forall t, z \in I \times U. \end{cases}$

à la place des inégalités (B-5-2), (B-5-4) et (B-5-5).

Ces nouvelles hypothèses entrainent la condition suivante :

$$\frac{dV_1(t,x,y)}{dt} \leq 0 \qquad \forall\ t,x,y \in I \times U \times U.$$

Toutefois, $V_1(t,x,y)$ est toujours une fonction uniformément peti

Nous résumons cette remarque par le théorème suivant :

Théorème II-4

Soit (B-5-1) un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, sur I X U.

Soit K(t) une matrice diagonale à coefficients strictement positifs vérifiant l'inégalité (B-5-2), où M {f,t,x,y} est la M-V-minorante associée à l'application H-monotone -f(t,x).

Alors, si l'une ou l'autre des conditions (B-5-9) ou (B-5-10) est vérifiée, la fonction $V_1(t,x,y)$ définie par (B-5-6) est une fonction de LIAPOUNOV uniformément petite du H-système différentiel (B-5-1).

b - Deuxième fonction de LIAPOUNOV : fonction déduite de la M-V-minorante

Nous reprenons à notre compte une fonction de LIAPOUNOV proposée dans {7} pour l'étude d'une classe de systèmes différentiels moin

générale que celle envisagée ici, en modifiant toutefois sensiblement les hypothèses, ce qui a pour effet d'étendre le domaine de stabilité.

Nous énonçons la proposition préliminaire suivante :

Proposition II-9

Si N est une M-matrice, il lui correspond une valeur propre réel positive de plus petit module à laquelle est associé un vecteur propre positif.

Démonstration

N étant une M-matrice, N^{-1} existe et est non négative. D'après le théorème de PERRON-FROBENIUS ({6} et {20}), N^{-1} possède une valeur propre λ réelle positive, unique et égale à son rayon spectral ; de plus à λ , correspond un vecteur propre W positif. On a donc

$$N^{-1} W = \lambda . W$$

En multipliant, à gauche, chaque membre de la relation précédente par N, il vient :

$$N W = \frac{1}{\lambda} W$$

ce qui démontre la proposition.

Théorème II-5

Soit :

$$(B\text{-}5\text{-}11) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, sur I X U

Soit M {f,t,x,y} la M-V-minorante associée à l'application H-monotone - f(t,x) relativement à p.

Soit λ (t,x,y) la valeur propre unique de la M-matrice M^t {f,t,x,y} réelle, positive, de plus petit module et associée au vecteur

propre positif $W(t,x,y)$.

Posons :

$$(B\text{-}5\text{-}12) \qquad C(x,y) = \inf_{t \in I} (\lambda(t,x,y) \,.\, W(t,x,y)).$$

Si la condition suivante est vérifiée :

$$(B\text{-}5\text{-}13) \qquad \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t} \leqslant 0 \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

ou s'il existe une fonction $\psi(x,y)$ vérifiant la condition :

$$(B\text{-}5\text{-}14) \qquad 0 \leqslant \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t} \leqslant \psi(x,y) < C(x,y)$$

alors, la fonction :

$$(B\text{-}5\text{-}15) \qquad V_2(t,x,y) = p^t(x-y).\, W(t,x,y)$$

est une fonction de LIAPOUNOV du H-système différentiel à dérivée eulérien définie négative sur $I \times U \times U$.

<u>Démonstration</u>

On vérifie facilement que $M\{f,t,x,y\}$ étant une M-matrice, il en est de même de $M^t\{f,t,x,y\}$, donc le résultat de la proposition II-9 est applicable.

Dans ces conditions, la fonction $V_2(t,x,y)$ est une fonction stri tement positive pour tout y différent de x, valeur pour laquelle elle s'an nule.

D'autre part, par dérivation, il vient :

$$(B\text{-}5\text{-}16) \qquad \frac{dV_2(t,x,y)}{dt} = p^t(x-y)\,\frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t} + \left(\frac{dp\,(x-y)}{dt}\right)^t .W(t,x,y).$$

quantité définie, continue sur $I \times U \times U$ et qui s'annule pour la valeur :

$$y = x$$

Vérifions que, sous les hypothèses du théorème II-5, la dérivée eulérienne de $V_2(t,x,y)$ est bien définie négative ; en effet (B-5-11) étant un H-système différentiel on a :

$$\left(\frac{dp\ (x-y)}{dt}\right)^t \leq -\ p^t(x-y).\ M^t\ \{f,t,x,y\}.$$

Reportons dans (B-5-16) il vient :

$$\frac{dV_2\ (t,x,y)}{dt} \leq p^t(x-y)\ \{-M^t\{f,t,x,y\}\ .W(t,x,y) + \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\}$$

soit, puisque $W(t,x,y)$ est vecteur propre de $M^t\ \{f,t,x,y\}$:

$$\text{(B-5-17)}\quad \frac{dV_2(t,x,y)}{dt} \leq p^t(x-y)\ \{-\lambda(t,x,y).W(t,x,y) + \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\}$$

Si la condition (B-5-13) est vérifée, la relation (B-5-17) peut s'écrire :

$$\frac{dV_2(t,x,y)}{dt} \leq -\ \lambda(t,x,y).\ p^t(x-y).\ W(t,x,y)$$

ou encore :

$$\frac{dV_2(t,x,y)}{dt} \leq -\ p^t\ (x-y)\ .\ C(x,y) \leq 0 \qquad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U.$$

De même, s'il existe une fonction $\psi\ (x,y)$ telle que l'inégalité (B-5-14) soit satisfaite, on a :

$$\frac{dV_2(t,x,y)}{dt} \leq p^t(x-y)\ \{-\lambda(t,x,y).W(t,x,y) + \psi(x,y)\} \leq p^t(x-y)\ \{-C(x,y)+\psi(x,y)\} <$$

$$\forall\, t,x,y \in I \times U \times U$$

Dans les deux cas, nous avons bien vérifié que $V_2(t,x,y)$ est une fonction de LIAPOUNOV à dérivée eulérienne définie négative sur $I \times U \times U$.

Théorème II-6

Sous les hypothèses du théorème II-5, $V_2(t,x,y)$ est une fonction uniformément petite.

Démonstration

Comme au sous-paragraphe a, on vérifie facilement que

$$\lim_{y \to x} V_2(t,x,y) = \lim_{y \to x} \{p^t(x-y).\ W(t,x,y)\} = 0$$

uniformément par rapport à $t \in I$.

Remarque

Comme au sous-paragraphe a, nous pouvons faire des hypothèses moins fortes pour obtenir des résultats intéressants sur le plan pratique; en effet si la relation suivante est vérifée :

$$\text{(B-5-18)} \qquad \frac{\partial W\ (t,x,y)}{\partial t} \leq \lambda(t,x,y)\ W\ (t,x,y) \qquad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U$$

on a :

$$\frac{dV_2\ (t,x,y)}{dt} \leq 0 \qquad \forall\, t,x,y \in I \times U \times U$$

et la fonction $V_2(t,x,y)$ est une fonction de LIAPOUNOV sur $I \times U \times U$; notons toutefois que $V_2(t,x,y)$ est toujours uniformément petite.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème II-7

Soit (B-5-11) un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, sur $I \times U$.

Soit $M\ \{f,t,x,y\}$ la M-V-minorante associée à l'application H-monotone $-f(t,x,y)$ relativement à p.

Soit $\lambda\ (t,x,y)$ la valeur propre unique de la M-matrice $M^t\ \{f,t,x,y\}$ réelle, positive, de plus petit module et associée au vecteur propre positif $W(t,x,y)$.

Alors, si l'inégalité (B-5-18) est vérifiée, la fonction $V_2(t,x,y)$ définie par (B-5-15) est une fonction de LIAPOUNOV uniformément petite du système (B-5-11).

C - Corollaire des théorèmes II-2 et II-5 : stabilité absolue des H-systèmes différentiels

Corollaire II-1

Soit

$$\text{(B-5-19)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur le domaine $I \times U$.

Soit $x(t,x_o)$ une solution particulière de (B-5-19) contenue dans U.

Alors, sous les hypothèses des théorèmes II-2 et II-3, ou sous celles des théorèmes II-5 et II-6, la solution $x(t,x_o)$ est absolument stable sur U.

Démonstration

On a vu qu'un H-système différentiel admet une fonction de LIAPOUNOV uniformément petite et, à condition que les hypothèses des théorèmes II-2 ou II-5 soient vérifiées, à dérivée eulérienne définie négative.

On sait, alors, que toute solution $x(t,x_o) \subset U$ est absolument stable.

d - Corollaire des théorèmes II-4 et II-7 - stabilité uniforme des H-systèmes différentiels

Corollaire II-2

Soit

$$\text{(B-5-20)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur le domaine I X U.

Soit $x(t,x_0)$ une solution particulière de (B-5-20) contenue dans U.

Alors, sous les hypothèses des théorèmes II-4 et II-3, ou sous celles des théorèmes II-7 et II-6, la solution $x(t,x_0)$ est uniformément stable sur U.

Démonstration

En effet, dans ces conditions, le H-système différentiel admet sur le domaine U, une fonction de LIAPOUNOV uniformément petite ; donc, toute solution contenue dans U est uniformément stable.

C - H-systèmes différentiels autonomes- Résumé des résultats

Pour l'étude de ce cas particulier, nous reprenons, brièvement, les grandes lignes du paragraphe B.

1°) Généralités

Soit f(x) l'application continue, bornée par rapport à $x \in U$ et lipschitzienne par rappo à x :

$$(C\text{-}1\text{-}1) \qquad \begin{cases} f(x) : U \longrightarrow E, \\ \|f(x)\| \leq C \quad \forall x \in E, \\ \|f(x) - f(y)\| \leq L \ \|x-y\| \qquad \forall x,y \in U \times U, \end{cases}$$

associée au système différentiel autonome :

$$(C\text{-}1\text{-}2) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x).$$

2°) Notion de H-systèmes différentiels autonomes relativement à une norme vectorielle p.

Définition II-9

Nous dirons que le système d'équations différentielles (C-1-2) est un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, si l'inégalité suivante est vérifée :

$$C\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{dp\ (x-y)}{dt} + M\{f,x,y\} \leq 0 \qquad \forall x,y \in U \times U$$

où M {f,x,y} est une M-matrice.

3°) Caractérisation des H-systèmes différentiels autonomes par les applications H-monotones

Définition II-10

Une application non linéaire :

$$f(x) : U \longrightarrow E$$

est dite H-monotone, s'il existe une M-matrice N de coefficients n_{ij} telle qu

$$(C\text{-}3\text{-}1) \quad \langle f_i(x) - f_i(y),\ x_i - y_i \rangle_i \geq \sum_{j=1}^{n} n_{ij} \|x_i - y_i\|_i \ \|x_j - y_j\|_j$$

$$\forall\ x, y \in U \times U$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Remarque

La caractérisation des applications H-monotones se fait comme au paragraphe B, sous paragraphe 3.

Nous sommes maintenant en mesure de relier les notions de H-monotonie et de H-systèmes différentiels autonomes ; nous citons un résultat analogue au théorème II-1 :

Théorème II-8

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système différentiel autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

soit un H-système différentiel sur U, relativement à la norme vectorielle p, est que l'application :

$$-f(x) : U \longrightarrow E$$

soit H-monotone sur U, relativement à cette même norme vectorielle. La M-V-minorante est également pseudo-majorante relativement à la norme vectorielle p.

4°) Etude de la stabilité des H-systèmes différentiels autonomes

a - Première fonction de LIAPOUNOV : fonction de LIAPOUNOV quadratique :

Théorème II-9

Soit

$$(C\text{-}4\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur U.

Soit M {f, x, y} la M-V-minorante associée à l'application H-monotone - f(x), relativement à la norme vectorielle p.

Soit K une matrice diagonale, constante, à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$(C\text{-}4\text{-}2) \quad \langle M\{f,x,y\}\, z, K, z\rangle \geq \beta \quad \|z\|^2 \quad \forall z \in U,$$

où β est un nombre positif.

Sous ces hypothèses la fonction :

$$(C\text{-}4\text{-}3) \quad V_1(x,y) = \langle p(x-y), K\, p(x-y)\rangle$$

est une fonction de LIAPOUNOV pour le H-système différentiel (C-4-1), à dérivée eulérienne définie négative sur U.

La démonstration de ce théorème se déroule de la même façon que celle du théorème II-2. Notons que l'existence de la matrice K est une conséquence du théorème de TARTAR.

Remarque

Comme précédemment, nous obtenons un résultat intéressant pour une valeur nulle de β , dans l'inégalité (C-4-2). Nous résumons cette remarque par le théorème suivant :

Théorème II-10

Soit un H-système différentiel autonome sur un ouvert U.

Si la matrice K définie dans le théorème précédent vérifie l'inégalité :

$$(C\text{-}4\text{-}4) \quad \langle M\{f,x,y\}\, z, K\, z\rangle \geq 0 \qquad \forall z \in U,$$

alors la fonction $V_1(x,y)$ définie par (C-4-3) est une fonction de LIAPOUNOV pour le H-système considéré.

b - Douxième fonction de LIAPOUNOV : fonction déduite de la M-V-minorante

Théorème II-11

Soit

$$(C\text{-}4\text{-}4) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p, sur U.

Soit M {f,x,y} la M-V-minorante associée à l'application H-monotone -f(x) relativement à p.

Soit λ (x,y) la valeur propre unique de la M-matrice M^t {f,x,y } réelle, positive, de plus petit module et associée au vecteur propre positif W(x,y).

Dans ces conditions, la fonction :

$$(C\text{-}4\text{-}5) \qquad V_2(x,y) = p^t(x-y).W(x,y)$$

est une fonction de LIAPOUNOV du H-système différentiel à dérivée eulérienne définie négative sur U X U.

c - Corollaire des théorèmes II-9 et II-11 : stabilité absolue des H-systèmes différentiels

Corollaire II-3

Soit

$$(C\text{-}4\text{-}6) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur le domaine U.

Soit $x(t,x_o)$ une solution particulière de (C-4-6) contenue dans U.

Alors, sous les hypothèses du théorème II-9 ou, sous celles du théorème II-11 la solution $x(t,x_0)$ est absolument stable sur U.

d - Corollaire du théorème II-10 : stabilité uniforme des H-systèmes différentiels

Corollaire II-4

Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (C\text{-}4\text{-}7)$$

un H-système différentiel relativement à la norme vectorielle p sur le domaine U.

Soit $x(t,x_0)$ une solution particulière de (C-4-7) contenue dans U.

Alors, sous les hypothèses du théorème II-10, la solution $x(t,x_0)$ est uniformément stable sur U.

D - Exemples

1°) Exemple I

Nous nous plaçons dans $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et nous considérons le système différentiel linéaire autonome :

$$(D\text{-}1\text{-}1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + a\, x_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} + b\, x_2 = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des constantes positives.

On vérifie facilement que le vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$x_1\,(t) = x_{10}\, e^{-a(t-t_o)}$$

$$x_2\,(t) = x_{20}\, e^{-b(t-t_o)}$$

est solution de (D-1-1) et que, de plus :

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = \lim_{t \to \infty} x_2(t) = 0$$

pour tout x_{10}, x_{20} et t_o.

Comme $\tilde{x} = \{0,0\}$ est également solution de (D-1-1) nous en déduisons que $\tilde{x}$ est solution absolument stable.

Montrons, maintenant, que (D-1-1) est un H-système différentiel sur $\mathbb{R}$; en effet on a:

$$\left.\begin{array}{l} \langle a\, x_1, x_1 \rangle \geqslant a \|x_1\|^2 \\[2ex] \langle b\, x_2, x_2 \rangle \geqslant b \|x_2\|^2 \end{array}\right. \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

La forme bilinéaire associée au système différentiel admet, donc, la M-V-minorante :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

et (D-1-1) est bien un H-système différentiel.

2°) Exemple II

Soit $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et le système d'équations différentielles non linéaires et autonomes :

$$(D\text{-}2\text{-}1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + \dfrac{\rho . x_2}{\sqrt{1+x_1^2}\,\sqrt{1+x_2^2}} = f_1(x_1, x_2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + \dfrac{\mu . x_1}{\sqrt{1+x_1^2}\,\sqrt{1+x_2^2}} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

où ρ et μ sont des constantes réelles positives vérifiant la condition suivante :

$$(D\text{-}2\text{-}2)\qquad \rho\,\mu < 1$$

Montrons que, cette relation étant satisfaite, l'application :

$$(D\text{-}2\text{-}3)\qquad -f(x) = \{-f_1(x_1,x_2),\ -f_2(x_1, x_2)\}$$

est H-monotone, et que la solution :

$$(D\text{-}2\text{-}4)\qquad \tilde{x} = \{0,0\}$$

est absolument stable.

Pour cela, nous devons minorer les quantités suivantes:

$$< -f_1(x_1, x_2), x_1 >$$

et

$$< -f_2(x_1, x_2), x_2 >$$

comme

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}$$

en utilisant l'inégalité de SCHWARZ on peut écrire :

$$\frac{-\rho}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}} < x_2, x_1 > \geqslant \frac{-\rho \|x_1\|_{\mathbb{R}} \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}}}{\sqrt{(1+x_1^2)\ (1+x_2^2)}} \geqslant -\rho\ \|x_1\|_{\mathbb{R}} \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

$$\frac{-\mu}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}} < x_2, x_1 > \geqslant \frac{-\mu\ \|x_1\|_{\mathbb{R}}\ \|x_2\|_{\mathbb{R}}}{\sqrt{(1+x_1^2)\ (1+x_2^2)}} \geqslant -\mu\ \|x_1\|_{\mathbb{R}} \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

Nous obtenons donc :

$$<- f_1(x_1,x_2),\ x_1 > \geqslant 1 \cdot \|x_1\|_{\mathbb{R}}^2 - \rho\ \|x_1\|_{\mathbb{R}} \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

$$<- f_2(x_1,x_2),\ x_2 > \geqslant -\mu\ \|x_1\|_{\mathbb{R}} \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}} + 1 \cdot \|x_2\|_{\mathbb{R}}^2$$

et l'application définie par (D-2-3) est H-monotone si la Z-matrice :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -\rho \\ -\mu & 1 \end{vmatrix}$$

est une M-matrice.

Vérifions donc que M est bien une M-matrice ; en effet on a :

$$M^{-1} = \frac{1}{1 - \rho\mu} \begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \mu & 1 \end{vmatrix}$$

et compte tenu de la relation (D-2-2), on constate bien que :

$$M^{-1} > 0$$

De plus les valeurs propres de M sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \rho\mu = 0$$

Cette équation du second degré possède un discriminant égal à :

$$\Delta' = \rho\mu > 0$$

donc, ses racines sont réelles et sont données par l'expression :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\rho\ \mu}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{\rho\ \mu}$$

où $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Donc M est bien une M-matrice et l'application (D-2-3) est bien H-monotone relativement à la norme vectorielle :

$$p(x) = \{\|x_1\|_{\mathbb{R}}\ ,\ \|x_2\|_{\mathbb{R}}\}$$

Nous en déduisons que $\tilde{x}$ est une solution absolument stable.

Vérifions cette propriété en utilisant les fonctions de LIAPOUNOV définies au paragraphe (C-4).

1°) Fonction de LIAPOUNOV quadratique :

Soit

$$K = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix}$$

la matrice diagonale à coefficients positifs, telle que K.M soit une matrice définie positive. La fonction :

$$V_1(x) = < p(x),\ Kp(x) > \ = \alpha\ \|x_1\|^2_{\mathbb{R}} + \beta\ \|x_2\|^2_{\mathbb{R}}$$

est bien définie positive.

De plus

$$\frac{dV_1(x)}{dt} = 2\ (\alpha\ \frac{d\ \|x_1\|_{\mathbb{R}}}{dt}\ \|x_1\|_{\mathbb{R}} + \beta \frac{d\ \|x_2\|_{\mathbb{R}}}{dt}\ \|x_2\|_{\mathbb{R}})\ .$$

Or, comme la relation en norme vectorielle :

$$\frac{dp\ (x)}{dt} \leq -\ M\ p(x).$$

est vérifiée, on a :

$$\frac{dV_1}{dt} \leq -\ 2\ (\alpha(\|x_1\|^2_{\mathbb{R}} - \rho\|x_2\|_{\mathbb{R}}\ \|x_1\|_{\mathbb{R}}) + \beta\ (\|x_2\|^2_{\mathbb{R}} - \mu\|x_1\|_{\mathbb{R}}\ \|x_2\|_{\mathbb{R}}))$$

inégalité qui peut s'écrire encore :

$$\frac{dV_1}{dt} \leq -2 \langle M.p(x), K.p(x) \rangle \leq -2\gamma . \|p(x)\|^2$$

Donc $V_1(x)$ est bien fonction de LIAPOUNOV du système (D-2-1) à dérivée eulérienne définie négative.

2°) fonction de LIAPOUNOV déduite de la M-V-minorante

On vérifie facilement que les éléments propres de M^t sont :

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ W'_{\lambda_1} = \{1, -\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\} \quad \text{et} \quad W'_{\lambda_2} = \{1, \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\}$$

Définissons

$$V_2(x) = p^t(x). W'_{\lambda_2} = \|x_1\|_{\mathbb{R}} + \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

Pour des raisons maintenant évidentes, $V_2(x)$ est une fonction définie positive ; de même :

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{d\|x_1\|_{\mathbb{R}}}{dt} + \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} . \frac{d\|x_2\|_{\mathbb{R}}}{dt} \leq -(1 - \sqrt{\rho\mu}) V_2(x) \leq 0$$

Nous aboutissons donc à des résultats analogues à ceux obtenus lors de l'étude précédente.

Nous avons donc bien vérifié que $\tilde{x}$ est une solution absolument stable du système (D-2-1).

Nous pouvons également constater cet état de fait par une étude expérimentale ; soit J l'ensemble suivant :

$$J = \{-14, \ldots\ldots, -1, +1, \ldots\ldots, +14\}$$

En effectuant une intégration numérique du système (D-2-1) par une méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 (cf. par exemple {21}) pour l'ensemble des valeurs initiales suivantes :

$x_{10} = \pm 14$ $\qquad$ x_{20} prend chacune des valeurs de l'ensemble J

x_{10} prend chacune des valeurs de l'ensemble J $\qquad$ $x_{20} = \pm 14$

et pour le choix suivant des paramètres :

$\rho = 0,2$ $\qquad$ $\mu = 0,1$

nous avons tracé, dans le plan de phase, l'ensemble des solutions représentées par la figure II.1.

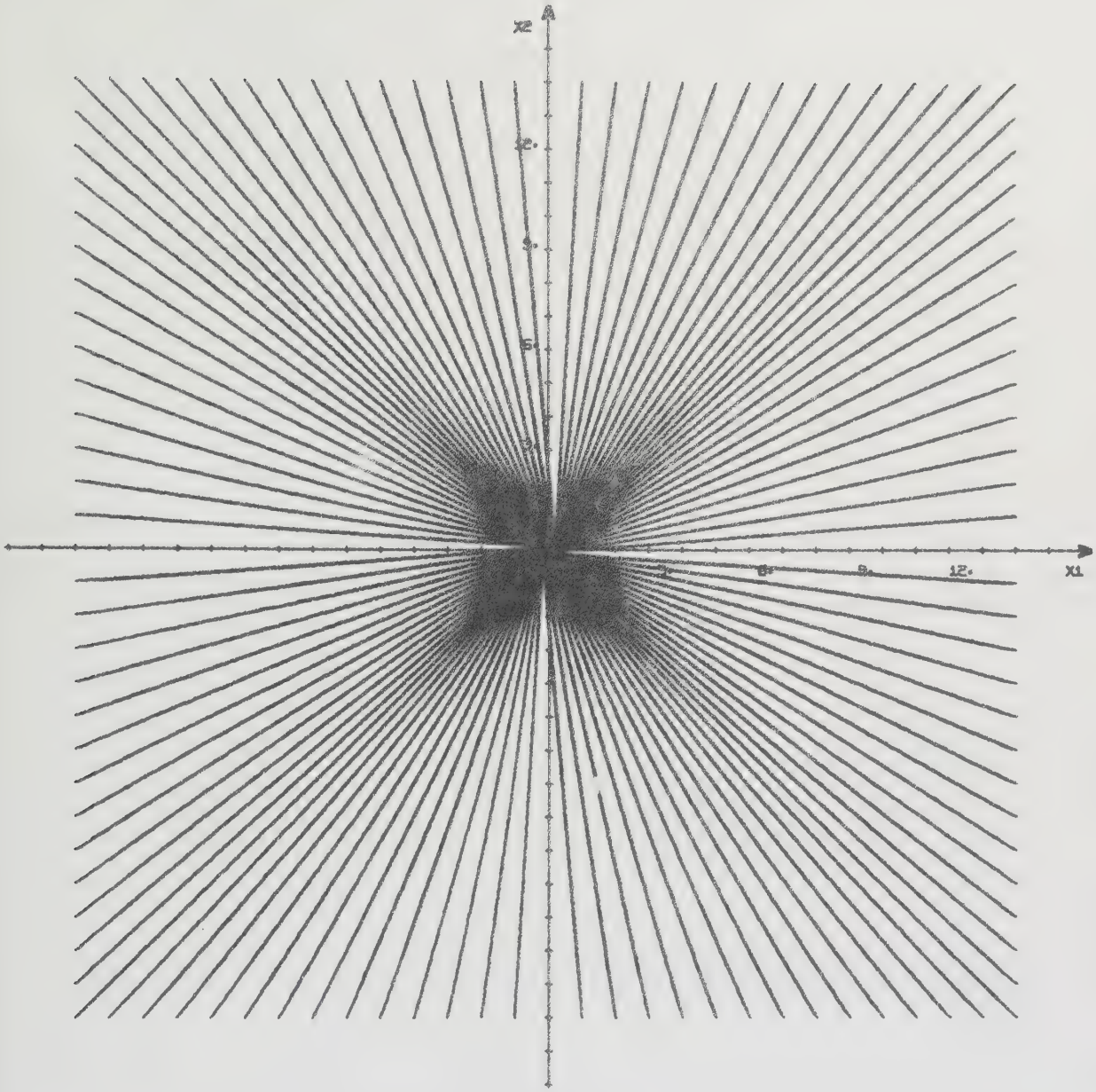

Figure II.1 - Plan des orbites pour le système différentiel

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1 + \frac{0,2 \quad x_2}{\sqrt{1 + x_1^2} \; \sqrt{1 + x_2^2}}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - x_2 + \frac{0,1 \quad x_1}{\sqrt{1 + x_1^2} \; \sqrt{1 + x_2^2}}$$

3°) Exemple III

Soit, dans $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système d'équations différentielles non linéaires et non autonomes :

$$(D\text{-}3\text{-}1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + \dfrac{\beta e^{-bt}\, x_2}{(\rho + x_1^p + x_2^q)^r} = f_1(t, x_1, x_2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + \dfrac{\delta\, e^{-at}\, x_1}{(\mu + x_1^s)^w\, (\gamma + x_2^u)^v} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

où ρ, μ et γ sont des nombres réels positifs,

γ et β sont des nombres positifs liés entre eux par la relation :

$$(D\text{-}3\text{-}2)\qquad 1 > \gamma\beta\, e^{-(a+b)t}$$

où a et b sont des nombres réels vérifiant la relation d'ordre

$$(D\text{-}3\text{-}3)\qquad b > a > 0$$

p, q, r, s, w, u, v sont des entiers pairs positifs.

Etudions la stabilité de la solution triviale $\tilde{x}$; comme lors de l'étude de l'exemple II, on vérifie facilement que l'application :

$$(D\text{-}3\text{-}4)\qquad -f(t,x) = \{-f_1(t,x_1,x_2),\ -f_2(t,x_1,x_2)\}$$

est H-monotone relativement à la norme vectorielle :

$$(D\text{-}3\text{-}5)\qquad p(x) = \{\|x_1\|_{\mathbb{R}},\ \|x_2\|_{\mathbb{R}}\}.$$

En effet on a :

$$\langle -f_1(t,x_1,x_2),\ x_1\rangle \geq 1.\|x_1\|_{\mathbb{R}}^2 - \beta\, e^{-bt}\cdot \|x_1\|_{\mathbb{R}}\, \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

$$\langle -f_2(t,x_1,x_2),\ x_2\rangle \geq -\delta\, e^{-at}\, \|x_1\|_{\mathbb{R}}\, \|x_2\|_{\mathbb{R}} + 1.\|x_2\|_{\mathbb{R}}^2$$

A cause de l'inégalité (D-3-2), la Z-matrice :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -\beta e^{-bt} \\ -\delta e^{-at} & 1 \end{vmatrix}$$

est une M-matrice dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{\beta\delta}\ e^{-\frac{(a+b)}{2}t}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{\beta\delta}\ e^{-\frac{(a+b)}{2}t}$$

et vérifient la relation d'ordre :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Donc, l'application $-f(t,x)$ est H-monotone sur E relativement à la norme vectorielle p. Le système différentiel envisagé étant non autonome, nous ne pouvons pas affirmer, immédiatement, la stabilité absolue de la solution $\tilde{x}$; nous avons, donc, besion d'examiner les fonctions de LIAPOUNOV définies précédemment.

1°) Fonction de LIAPOUNOV quadratique

Considérons la matrice diagonale à coefficients positifs :

$$K(t) = \begin{vmatrix} \beta e^{-bt} & 0 \\ 0 & \delta e^{-at} \end{vmatrix}$$

La matrice symétrique :

$$K(t).M = \begin{vmatrix} \beta e^{-bt} & -\beta^2 e^{-2bt} \\ -\delta^2 e^{-2at} & \delta e^{-at} \end{vmatrix}$$

est définie positive, car tous ses mineurs principaux sont positifs.

La fonction :

$$V_1(t,x) = \langle p(x),\ K(t).\ p(x)\rangle = \beta e^{-bt}||x_1||^2_{\mathbb{R}} + \delta e^{-at}||x_2||^2_{\mathbb{R}}$$

est positive ; calculons la dérivée eulérienne de $V_1(t,x)$:

$$\frac{dV_1}{dt} = -\ \{b\ \beta e^{-bt}||x_1||^2_{\mathbb{R}} + a\ \delta e^{-at}||x_2||^2_{\mathbb{R}}\} + 2\beta e^{-bt}||x_1||_{\mathbb{R}}\ \frac{d\|x_1\|_R}{dt}$$

$$+\ 2\ \delta e^{-at}||x_2||_{\mathbb{R}}\ \frac{d||x_2||_{\mathbb{R}}}{dt}$$

Compte tenu des égalités (D-3-1) et après majoration on a :

$$\frac{dV_1}{dt} \leq -\ \{b\ \beta e^{-bt}||x_1||^2_{\mathbb{R}} + a\delta e^{-at}||x_2||^2_{\mathbb{R}}\} - 2\ \langle K(t)\ Mp(x),\ p(x)\rangle$$

Soit encore, puisque K(t).M est une matrice définie positive :

$$\frac{dV_1(t,x)}{dt} \leq -\ \{b\ \beta||x_1||^2_{\mathbb{R}} + a\delta\ ||x_2||^2_{\mathbb{R}}\ \}$$

Donc la dérivée eulérienne de $V_1(t,x)$ est définie négative et $\tilde{x}$ est une solution absolument stable de (D-3-1).

Nous aurions pu constater cet état de chose directement en appliquant la théorème II-2 ; en effet K(t) étant une fonction décroissante de t, sa dérivée est bien une matrice définie négative et nous sommes dans les conditions d'application des théorèmes II-2 et II-3 et du corollaire II-1.

2°) Fonction de LIAPOUNOV déduite de la M-V-minorante :

On montre que :

$$W'_{\lambda_1} = \{1,\ \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\ e^{-\frac{(b-a)}{2}t}\}$$

est vecteur propre de M^t associé à la valeur propre λ_1

Soit :

$$V_2(t,x) = p^t(x).\ W'_{\lambda_1} = ||x_1||_{\mathbb{R}} + \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\ e^{-\frac{(b-a)}{2}t}\ ||x_2||_{\mathbb{R}}$$

Comme : $1 \geq e^{-\frac{(b-a)}{2}t} \geq 0 \qquad \forall t > 0$

On a :

$$V_2(t,x) \geq \|x_1\|_{\mathbb{R}} \geq 0$$

De plus :

$$\frac{dV_2(t,x)}{dt} = \frac{d\,\|x_1\|_{\mathbb{R}}}{dt} + \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\, e^{-\frac{(b-a)}{2}t} \frac{d\,\|x_2\|_{\mathbb{R}}}{dt} - \frac{(b-a)}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\, e^{-\frac{(b-a)}{2}t} \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

Soit encore :

$$\frac{dV_2(t,x)}{dt} \leq -(1-\sqrt{\beta\delta}\, e^{-\frac{(a-b)}{2}t})\, V_2(t,x) - \frac{(b-a)}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\, e^{-\frac{(b-a)}{2}t} \|x_2\|_{\mathbb{R}}$$

On vérifie aisément que :

$$\frac{dV_2}{dt} \leq -(\lambda_1(t,x).\, V_2(t,x) + \frac{(b-a)}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\, e^{-\frac{(b-a)}{2}t} \|x_2\|_{\mathbb{R}})$$

et nous pouvons effectuer la majoration suivante :

$$\frac{dV_2}{dt} \leq -\|x_1\|_{\mathbb{R}} \leq 0$$

Donc $V_2(t,x)$ est une fonction de LIAPOUNOV à dérivée eulérienne définie négative ; nous en déduisons que $\tilde{x}$ est une solution absolument stable de (D-3-1).

Ici aussi, nous avons également effectué une vérification expérimentale de ce phénomène en intégrant numériquement le H-système différentiel (D-3-1) pour les mêmes conditions initiales qu'au sous-paragraphe (D-2) et pour le choix suivant des paramètres :

$\rho = \mu = \gamma = 1$

$\beta = 1 \qquad \delta = 2$

$b = 12 \qquad a = \frac{1}{2}$

$p = 2$ $q = 6$ $r = 4$

$s = 14$ $w = 8$ $u = 16$ $v = 10$

L'ensemble des orbites est représenté par la figure II.2.

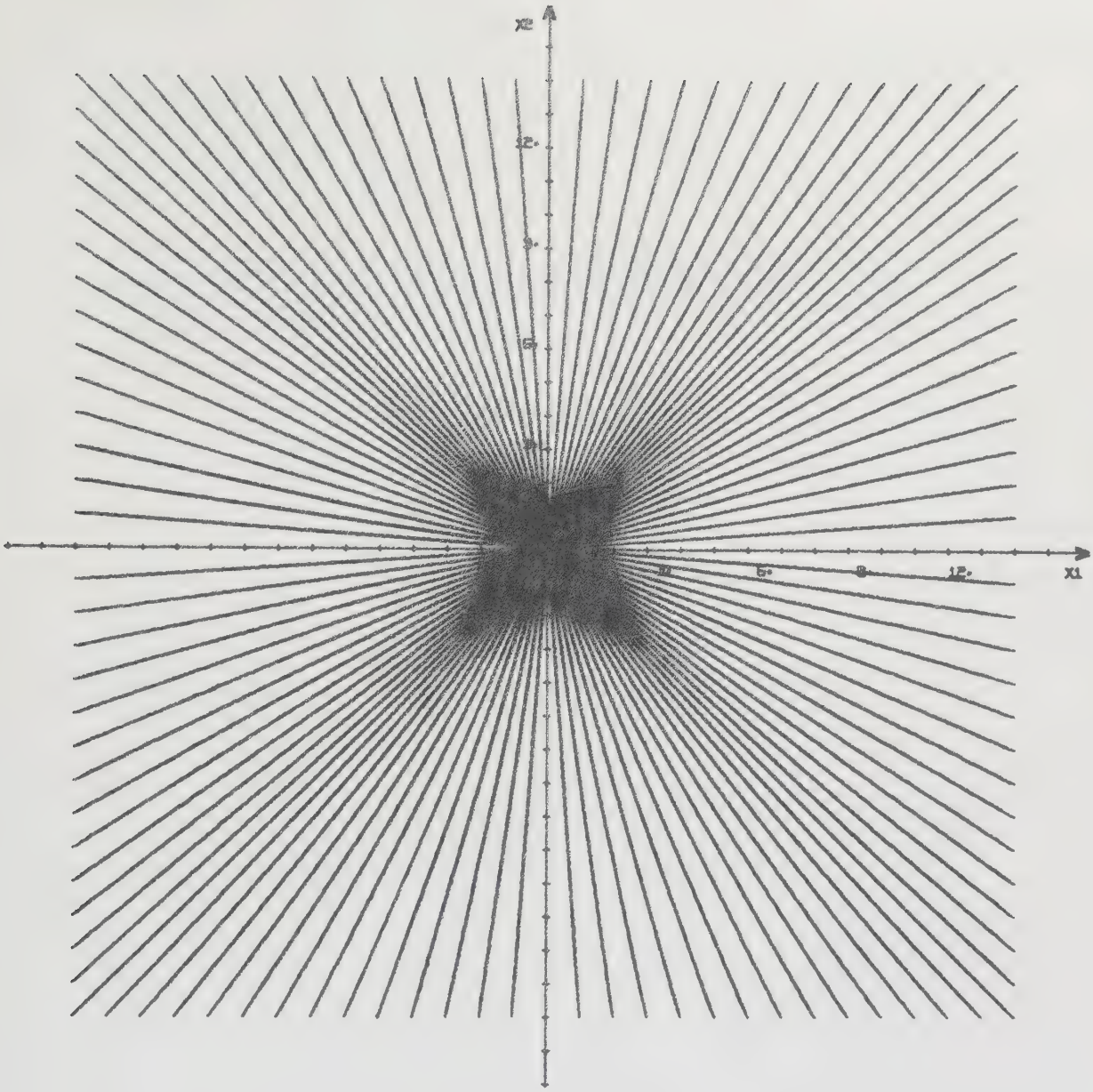

Figure II.2 - Plan des orbites pour les équations

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1 + \frac{e^{-12t}\, x_2}{(1 + x_1^{\,2} + x_2^{\,6})^4}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - x_2 + \frac{2\, e^{-\frac{t}{2}}\, x_1}{(1 + x_1^{\,14})^8\, (1 + x_2^{\,16})^{10}}$$

4°) Exemple IV

Considérons, dans $E = R^n$, le système d'équations différentielles linéaires et autonomes :

$$\text{(D-4-1)} \qquad \frac{dx}{dt} = A.x$$

On sait que $\tilde{x}$ est une solution absolument stable de (D-4-1) si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice A sont négatives.

Nous pouvons montrer directement que si un système différentiel linéaire autonome est un H-système différentiel, alors, toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives ; cette démonstration est assez longue et nous aurons l'occasion d'en refaire une analogue au chapitre suivant (cf. paragraphe D et paragraphe F.1 du chapitre III) ; en effet nous verrons

- d'une part, que si un système différentiel est un H-système différentiel, alors, il existe une matrice K symétrique définie positive telle que :

$$\text{(D-4-2)} \quad < - A\,x,\ K\,x > \ \geqslant \beta \, \|x\|^2 \qquad \forall\, x \in U$$

- d'autre part, que si, pour un système différentiel linéaire et autonome, la condition (D-4-2) est vérifiée, alors la matrice A a ses valeurs propres à parties réelles négatives.

CHAPITRE III

DEFINITION ET ETUDE DE LA STABILITE DES K-SYSTEMES DIFFERENTIELS.

Soit E un espace de HILBERT sur le corps des réels $\mathbb{R}$ muni, du produit scalaire noté $< ,>$ et défini comme suit :

$$< x, y > = x^{t}.y \qquad \forall x, y \in E$$

ainsi que de la norme euclidienne scalaire associée :

$$\|x\| = (<x, x>)^{1/2} \qquad \forall x \in E$$

On notera I l'intervalle fermé :

$$I = \{t_o, T\} \subset \mathbb{R}$$

et U un ouvert de E.

A - K - <u>Systèmes différentiels non autonomes</u>

1°) <u>Hypothèses - Définitions et propriétés</u>

On considère l'application continue et bornée du type :

$$\text{(A-1-1)} \qquad \begin{cases} f(t,x) : I \times U \longrightarrow E \\ \|f(t,x)\| \leq C \qquad \forall t, x \in I \times U \\ f(t,x) \text{ Lipschitzienne par rapport à } x \text{ pour tout } t \in I \end{cases}$$

associée au système différentiel non autonome :

$$\text{(A-1-2)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

a - <u>K - Systèmes différentiels forts</u>

Soient $y = y(t, y_o)$ et $x = x(t, x_o)$ deux solutions de (A-1-2) telles que :

$$\|y_o - x_o\| \leq \delta ,$$

où δ est un nombre positif donné.

Définition . III-1

On dira que (A-1-2) est un K-système différentiel fort s'il existe un champ de matrices $K(t)$, auto-adjointes, continues, vérifiant la relation suivante :

$$(A-1-3) \quad \langle K(t) \,.\, z(t) \,,\, z(t) \rangle \geq \alpha \, \|z\|^2 \quad \forall t,\ z \in I \times U$$

tel que

$$(A-1-4) \quad \langle -(f(t,x) - f(t,y)),\ K(t)\ (x - y) \rangle \geq \beta \, \|x - y\|^2$$

$$\forall\, t,\ x,\ y \in I \times U \times U$$

Proposition III-1

x et y étant deux solutions distinctes d'un K-système différentiel fort, alors on a l'inégalité suivante :

$$(A-1-5) \quad \left\langle \frac{d\ (x-y)}{dt} \,,\ K(t)\ (x - y) \right\rangle \leq -\beta \, \|x - y\|^2$$

$$\forall\, t,\ x,\ y \in I \times U \times U \,.$$

Cette inégalité provient du fait que, en vertu de l'inégalité (A-1-4) on a :

$$\left\langle \frac{d\ (x-y)}{dt} \,,\ K(t)\,(x-y) \right\rangle = \langle f(t,x) - f(t,y),\ K(t)\ (x-y) \rangle \leq -\beta \, \|x-y\|^2$$

$$\forall t,\ x,\ y \in I \times U \times U.$$

b - K - Systèmes différentiels faibles

Nous envisageons à présent un cas particulier de K-systèmes différentiels forts pour lesquels :

$$(A-1-6) \qquad \beta = 0$$

Nous donnons la définition suivante :

Définition III-2

On dira que (A-1-2) est un K-système différentiel faible, si c'est un K-système différentiel fort pour lequel la relation (A-1-6) est vérifiée.

Dans ce cas là l'inégalité (A-1-5) devient :

$$(A-1-7) \quad < \frac{d\,(x-y)}{dt} \,,\, K(t)\,(x-y) > \;\leq\; 0 \qquad \forall\, t, x, y \in I \times U \times U.$$

Remarque :

Par la suite, nous établirons toujours nos résultats dans le cas de l'hypothèse forte, puis nous examinerons en corollaire ce qu'ils deviennent en appliquant l'hypothèse faible.

2°) Fonctions de LIAPOUNOV quadratiques associées aux K-systèmes différentiels

Théorème III-1

Soit un K-système différentiel fort ; si la matrice $\frac{dK}{dt}$ vérifie l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$(A-2-1) \quad < z, \frac{dK}{dt}\, z > \leq 0 \qquad \forall\, t,\ z \in I \times U$$

ou

$$(A-2-2) \quad 0 \leq < z \,,\, \frac{dK}{dt}\, z > \leq \gamma\, \|z\|^{\beta} \quad \forall t,\ z \in I \times U$$

avec

$$\gamma < 2\beta$$

alors la fonction

$$V\,(t, x, y) = \; <x(t) - y(t) \,,\, K(t)\,.\,(x(t) - y(t))>$$

associée au K-système différentiel (A-1-2) est unefonction de LIAPOUNOV à dérivée eulérienne définie négative.

Démonstration

La fonction $V(t,x,y)$ étant définie, continue dans $I \times U \times U$ et vérifiant de plus

$$V(t,x,x) = 0$$

$$V(t,x,y) \geq \alpha \|x - y\|^2 \qquad \forall t, x, y \in I \times U \times U$$

elle est définie positive.

De plus :

$$\frac{dV(t,x,y)}{dt} = 2 < \frac{d(x-y)}{dt}, K(t) . (x-y)> + < x-y , \frac{dK}{dt}(x-y)>$$

nous constatons que $\frac{dV}{dt}$ est également définie continue dans $I \times U \times U$ et que

$$\frac{dV(t, x,x)}{dt} = 0 \qquad \forall t,x \in I \times U$$

De plus, l'inégalité (A-1-5) nous permet d'affirmer que :

$$\text{(A-2-3)} \quad \frac{dV(t,x,y)}{dt} \leq - 2\beta\|x-y\|^2 + < x-y, \frac{dK}{dt}(x-y> \quad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

alors, si l'une ou l'autre des inégalités (A-2-1) où (A-2 -2) est vérifiée, nous aurons :

$$\text{(A-2-1)} \longrightarrow \frac{dV}{dt} \leq - 2\beta \|x - y\|^2$$

$$\text{(A-2-2)} \longrightarrow \frac{dV}{dt} \leq - (2\beta-\gamma) \|x - y\|^2$$

et le théorème est démontré.

Théorème III-2

Sous les hypothèses du théorème III-1 *la fonction* $V(t,x,y)$ *est uniformément petite.*

Démonstration

Il nous suffit de vérifier que :

$$\lim_{\|x-y\| \to 0} V(t,x,y) = \lim_{x \to y} < x - y , K(t) . (x-y)> = 0$$

uniformément par rapport à t.

Remarque :

Dans le cas où, seule la condition (A-2-1) est vérifiée, nous pouvons donner une autre démonstration du théorème III-2 ; en effet il suffit de remarquer que, dans ces conditions, la matrice K(t) est une fonction décroissante de t sur I, donc que $K(t_o)$ est un maximum de K(t) sur I; K(t) vérifiant l'inégalité (A-1-3), il en sera de même pour $K(t_o)$ et nous aurons donc

$$\alpha \, \|x - y\|^2 \leq V(t,x,y) \leq \langle x - y, K(t_o)(x - y)\rangle .$$

Corollaire III-1

Soit un K-système différentiel faible ; si la matrice $\frac{dK}{dt}$ *vérifie l'une ou l'autre des relations (A-2-1) ou (A-2-2) avec, pour cette dernière,*

$$\gamma = 2\beta$$

alors la fonction V (t,x,y) est une fonction de LIAPOUNOV associée au K-système différentiel faible (A-1-2)

La démonstration est identique à la démonstration du théorème III-1 , mais, à cause des conditions imposées sur la matrice $\frac{dK}{dt}$, on aura :

$$\frac{dV(t,x,y)}{dt} \leq 0 \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U$$

Remarque :

L'introduction d'hypothèses faibles ne changera rien au fait que V(t,x,y) est uniformément petite.

3°) Stabilité absolue et stabilité uniforme des K-systèmes différentiels

a - Stabilité absolue des K-systèmes différentiels forts

Théorème III-3

Si, dans un certain domaine I X U, le système différentiel non autonome :

$$(A-3-1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

est un K-système différentiel fort admettant une solution $x(t,x_0)$, et si les hypothèses du théorème III-1 sont vérifiées alors la solution $x(t,x_0)$ est absolument stable.

En effet, on vient de voir que, dans ces conditions, il existait une fonction de LIAPOUNOV à dérivée eulérienne définie négative et, de plus, on a montré qu ' elle est uniformément petite ; d'où le théorème III-3

b - Stabilité uniforme des K-systèmes différentiels faibles

Théorème III-4

Si, dans un certain domaine I X U, le système différentiel (A-3-1) est un K-système différentiel faible admettant la solution $x(t,x_0)$ et si les hypothèses du corollaire III-1 .), sont vérifiées, alors la solution $x(t,x_0)$ est uniformément stable.

La démonstration découle encore de la théorie de la seconde méthode de LIAPOUNOV.

B - K - systèmes différentiels autonomes - Résumé des résultats.

1°) Hypothèses - définitions

On considère l'application continue et bornée :

$$(B\text{-}1\text{-}1)\quad \begin{cases} f(x) : U \subset E \longrightarrow E \\ \|f(x)\| \leq C \qquad \forall\, x \in U \\ f(x) \quad \text{lipschitzienne par rapport à } x \end{cases}$$

associée au système différentiel autonome :

$$(B\text{-}1\text{-}2)\qquad \frac{dx}{dt} = f(x).$$

Comme au paragraphe A, nous distinguerons les hypothèses forte et faible et nous donnerons des définitions analogues.

a - K - systèmes différentiels forts

Définition III-3

Le système (B-1-2) est un K-système différentiel fort s'il existe une matrice constante K, auto-adjointe vérifiant l'inégalité suivante :

$$(B\text{-}1\text{-}3)\qquad \langle K z , z \rangle \geq \alpha \|z\|^2 \qquad \forall\, z \in U$$

de telle sorte que :

$$(B\text{-}1\text{-}4)\qquad \langle -(f(x) - f(y)) , K(x-y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \quad \forall\, x, y \in U \times U.$$

b - K - systèmes différentiels faibles

Définition III-4

On dira que (B-1-2) est un K-système différentiel faible, si c'est un K-système différentiel fort pour lequel :

$$\beta = 0 .$$

2°) Fonctions de LIAPOUNOV quadratiques associées aux K-systèmes différentiels

Théorème III-4

La fonction :

$$V(x,y) = \langle x - y \, , \, K\,(x - y) \rangle$$

associée au K-système différentiel fort (B-1-2) est une fonction de LIAPOUNOV à dérivée eulérienne définie négative.

Corollaire III-2

La fonction $V(x,y)$ associée au K-système différentiel faible est une fonction de LIAPOUNOV.

Pour une démonstration de ces résultats nous renvoyons au paragraphe A, sous paragraphe 2.

3°) Stabilité absolue et stabilité uniforme des K-systèmes différentiels

a - Stabilité absolue des K-systèmes différentiels forts

Théorème III-6

Si, dans un certain domaine ouvert $U \subset E$, le système différentiel autonome :

$$(B\text{-}3\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

est un K-système différentiel fort admettant une solution $x(t,x_o)$, alors celle-ci est absolument stable.

Nous démonstrons que $x(t,x_o)$ est asymptotiquement stable de la même manière qu'au paragraphe (A-3) ; de plus, on sait que (cf. {8} page 64), si l'équilibre d'un système autonome est asymptotiquement stable, alors il est absolument stable. D'où le théorème III-6.

b - Stabilité uniforme des K-systèmes différentiels faibles

Théorème III-7

Si, dans un certain domaine ouvert U, le système autonome (B-3-1)est un K-système différentiel faible, alors toute solution $x(t,x_0)$ contenue dans U est uniformément stable.

On montre que la solution est stable comme au paragraphe (A-3) ; de plus, le système étant autonome (cf {8} page 62)on en déduit la stabilité uniforme.

C - Problème réciproque

1°) Position du problème

On vient d'établir que, si un système différentiel est un K-système différentiel fort dans un certain domaine $I \times U \subset \mathbb{R} \times E$, alors toute solution $x(t,x_o)$ contenue dans U est absolument stable.

Inversement, étant donné un système différentiel admettant une solution absolument stable, nous allons chercher dans quelle mesure il est un K-système différentiel fort.

Comme précédemment nous distinguerons encore les cas des systèmes non autonomes et autonomes et nous constaterons que, dans cette dernière éventualité, les difficultés s'aplanissent.

2°) Systèmes différentiels non autonomes

a - Systèmes linéaires

Proposition III-2

Soit $A(t)$ une matrice réelle fonction continue de $t \in I$ et bornée.

Si le système différentiel linéaire

$$(C\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t).x,$$

est absolument stable, alors il existe une fonction de LIAPOUNOV :

$$(C\text{-}2\text{-}2) \qquad V(t,x) = \langle x, G(t).x \rangle$$

telle que :

$$(C\text{-}2\text{-}3) \qquad \frac{dV(t,x)}{dt} \leq -\beta \|x\|^2 ,$$

et, si l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée :

$$(C\text{-}2\text{-}4) \qquad \left\langle \frac{dG}{dt} x, x \right\rangle \leq 0 \qquad \text{avec} \left\| \frac{dG}{dt} \right\| \leq \beta ,$$

ou

$$(C\text{-}2\text{-}5) \qquad 0 \leq \left\langle \frac{dG}{dt}\, x, x \right\rangle,$$

$$\forall\, t,\ x \in I \times U \subset \mathbb{R} \times E$$

alors il existe une matrice K(t) telle que le système (C-2-1) soit un K-système différentiel sur I X U.

Démonstration

On sait que, si un système linéaire est absolument stable, il existe une fonction de LIAPOUNOV quadratique (cf. {17} page 64, théorème 7-3) vérifiant d'une part :

$$V(t,x) \geq \alpha \ \|x\|^2$$

et d'autre part l'inégalité *(C-2-3)* (cf. {9} page 307, théorème 4-1). On peut donc écrire :

$$\langle K(t) \,.\, A\, x, x\rangle + \left\langle x, \frac{dG}{dt}\, x\right\rangle \leq -\beta \ \|x\|^2$$

où $\qquad K(t) = G(t) + G^*(t)$

est une matrice autoadjointe vérifiant :

$$\langle K(t)\, x, x\rangle \geq 2\,\alpha\, \|x\|^2$$

Deux cas sont à envisager :

1°) $\left\langle x, \frac{dG}{dt}\, x\right\rangle < 0$

en vertu de l'inégalité de SCHWARTZ on a :

$$-\left\|\frac{dG}{dt}\right\| \ \|x\|^2 \leq \left|\left\langle x, \frac{dG}{dt}\, x\right\rangle\right|$$

Donc, tant que la norme de la matrice $\frac{dG}{dt}$ reste petite, on a :

$$\left(\beta - \left\|\frac{dG}{dt}\right\|\right) \|x\|^2 \leq \langle -A(t).x, K(t)\, x\rangle$$

2°) Si :

$$0 \leq \langle x, \frac{dG}{dt} x \rangle \leq \left\| \frac{dG}{dt} \right\| \|x\|^2$$

On a alors :

$$\beta \|x\|^2 \leq \beta \|x\|^2 + \langle x , \frac{dG}{dt} . x \rangle \leq \langle -A(t).x, K(t)x \rangle$$

Donc, dans ces deux cas, on a bien vérifié que (C-2-1) est un K-système différentiel.

b - Systèmes non linéaires

Dans ce cas les difficultés augmentent car, (cf. {9} page 309, théorème 4.2) lorsqu'un système différentiel non linéaire admet une solution absolument stable on sait qu'il existe une fonction de LIAPOUNOV $V(t,x)$ à dérivée définie négative, mais rien ne nous permet d'affirmer que $V(t,x)$ est une fonction quadratique en x.

Nous serons donc obligé de faire des hypothèses supplémentaires et nous énoncerons :

Proposition III-3

Soit $f(t,x)$ une application localement lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in I$, et le système différentiel non linéaire associé :

$$(C-2-6) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

Soit $x(t,x_0)$ une solution absolument stable de (C-2-6).

Supposons, de plus, que la fonction de LIAPOUNOV associée soit de la forme :

$$V(t,x,y) = \langle x-y, G(t). (x-y) \rangle$$

sa dérivée eulérienne vérifiant la condition (C-2-3), et que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit vérifiée :

$$(C-2-7) \quad \left\langle \frac{dG}{dt}(x-y),\ x-y \right\rangle \leq 0 \qquad \text{avec} \quad \left\| \frac{dG}{dt} \right\| \leq \beta \ \forall t,x,y \in I \times U \times U,$$

où

$$(C-2-8) \quad 0 \leq \left\langle \frac{dG}{dt}(x-y),\ x-y \right\rangle \qquad \forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

Dans ces conditions, il existe une matrice $K(t)$, telle que le système (C-2-1) soit un K-système différentiel **sur** *$I \times U$.*

La démonstration est identique à celle de la proposition III-2

3°) Systèmes différentiels autonomes

Ici les choses deviennent plus simples car on sait que (cf. {8} page 70 corollaire 2), si un système différentiel autonome admet une solution absolument stable, la fonction de LIAPOUNOV peut être construite indépendamment de t. Par un même type de raisonnement nous démontrerons la proposition suivante :

Proposition III-4

Soit le système différentiel autonome :

$$(C-3-1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x),$$

et $x(t,x_0)$ une solution absolument stable de (C-3-1).

Si la fonction de LIAPOUNOV associée à (C-3-1) est quadratique :

$$V(x,y) = \langle x-y\ ,\ G\ (x-y) \rangle,$$

où G est une matrice indépendante de t, sa dérivée eulérienne vérifiant une inégalité du type (C-2-3) , alors le système (C-3-1) est un K-système différentiel.

D - Un cas particulier de K-systèmes différentiels : les H-systèmes différentiels

Nous allons montrer que les H-systèmes différentiels étudiés au chapitre II représentent une sous-classe des K-systèmes différentiels.

1°) H-systèmes différentiels et K-systèmes différentiels non autonomes

Nous énonçons la proposition suivante :

Proposition III- 5

Une condition suffisante pour que le système différentiel non autonome :

$$(D\text{-}1\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

soit un K-système différentiel est qu'il soit un H-système différentiel.

Démonstration

En effet nous avons établi (cf. chapitre II, paragraphe B, théorème II-1 que, si (D-1-1) était un H-système différentiel, alors l'application $-f(t,x)$ était H-monotone ; d'une façon générale, on peut écrire :

$$(D\text{-}1\text{-}2) \quad <-(f_i(t,x)-f_i(t,y)),x_i-y_i> \geq \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \|x_j-y_j\|_j \|x_i-y_i\|_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

M étant une M-matrice on sait (cf. {19}) qu'il existe une matrice diagonale D(t) à coefficients strictement positifs telle que :

$$<M^t z, D.z> \geq \beta \|z\|^2 \qquad \forall t,z \in I \times U$$

Soit $d_i(t)$ l'élément diagonal de la matrice D ; définissons l'opérateur $K_d(t)$ comme suit :

$$K_d(t) : I \times E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$$

tel que :

$$x = \{x_1,\dots,x_n\} \xrightarrow{K_d(t)} \{d_1\, x_1,\dots,\, d_n x_n\} \quad \forall\, x_i \in E_i$$

La matrice D(t) étant diagonale et à coefficients positifs, on vérifie facilement que $K_d(t)$ est un opératcur linéaire en x, auto-adjoint et défini positif au sens matriciel du terme.

Multiplions chacune des équations (D-1-2), par $d_i(t)$ et sommons par rapport à i ; il vient :

$$\text{(D-1-3)} \quad \sum_{i=1}^{n} \langle -(f_i(t,x)-f_i(t,y)), d_i(t)(x_i-y_i)\rangle_i \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_i(t).m_{ij}\, \|x_i-y_i\|_i \|x_j-y_j\|_j$$

On vérifie facilement que :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle -(f_i(t,x)-f_i(t,y)),\, d_i(t)\,(x_i-y_i)\rangle_i = \langle -(f(t,x)-f(t,y)), K_d(t)(x$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \|x_j-y_j\|_j \}\, d_i(t)\, \|x_i-y_i\|_i = \langle M^t p(x-y), D(t)p(x-y) \rangle$$

où p(z) représente la norme vectorielle :

$$p(z) = \{\dots\dots,\ \|z_i\|_i, \dots\dots\}$$

On peut donc écrire l'inégalité (D-1-3) de la façon suivante :

$$\langle -(f(t,x)-f(t,y)),\, K_d(t).(x-y)\rangle \geq \langle M^t\, p(x-y),\, D(t).p(x-y)\rangle$$

Nous pourrons appliquer le théorème de TARTAR {19} et nous obtenons alors :

$$\langle -(f(t,x) - f(t,y)),\, K_d(t).(x-y) \rangle \geq \beta \|x-y\|^2$$

où $\| \quad \|$ est la norme euclidienne dans E ; donc (D-1-1) est bien un K-système différentiel.

2°) H-systèmes différentiels et K-systèmes différentiels autonomes

Nous obtenons, par une démonstration semblable, un résultat analogue.

Proposition III-8

Une condition suffisante pour que le système différentiel autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

soit un K-système différentiel est qu'il soit un H-système différentiel .

E - Existence et unicité des solutions des K-systèmes différentiels

1°) Existence et unicité des solutions des K-systèmes différentiels

Nous utiliserons un théorème établi par HARTMAN P. {10} .

Théorème III-8

Considérons le problème de valeurs initiales :

$$(E\text{-}1\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

i) L'application continue :

$$(E\text{-}1\text{-}2) \qquad f(t,x) : I \times U \subset \mathbb{R} \times E \to E,$$

est bornée :

$$\|f(t,x)\| \leq C \qquad \forall\, t,x \in I \times U.$$

ii) $V(t,x,y)$ est une fonction continue à valeurs réelles sur $I \times U \times U$ telle que :

- *a* - $V(t,x,y) > 0$ *et* $V(t,x,x) = 0$
- *b* - $\dfrac{\partial V(t,x,y)}{\partial t}$ *existe et soit continue*
- *c* - *V admette des dérivées au sens de FRECHET V_x et V_y par rapport, respectivement, à x et y, telles que :*

$$V_x(t,x,y) : I \times U^{wk} \times U^{wk} \longrightarrow E^{wk}$$

$$V_y(t,x,y) : I \times U^{wk} \times U^{wk} \longrightarrow E^{wk}$$

soient continues, où wk désigne les ensembles munis de la topologie faible. De plus $V_x(t,x,y)$ est bornée sur $I \times U \times U$

- *d* - *la limite :*

$$V_{xx}(t,x)\, y = \lim_{h \to 0} \left(\frac{V_x(t,x+hy,x)}{h} \right)$$

existe pour la topologie faible et est bornée pour $t \in I$ et $x \in U$.

De plus l'application :

$$y \longrightarrow V_{xx}(t,x)y$$

est une application linéaire, bornée, admettant une application inverse $V_{xx}^{-1}(t,x)$ bornée, définie sur E et continue sur $I \times U$.

iii) Enfin la condition suivante est vérifiée :

$$(E\text{-}1\text{-}3) \quad \frac{\partial V(t,x,y)}{\partial t} + \langle f(t,x), V_x(t,x,y)\rangle + \langle f(t,y), V_y(t,x,y)\rangle \leq 0$$

$$\forall t,x,y \in I \times U \times U.$$

Dans ces conditions le problème (E-1-1) a au moins une solution sur l'intervalle I ; cette solution est unique si

$$V(t,x,y) = 0$$

entraine $\quad x = y$

Remarque :

1 - La dérivée au sens de FRECHET V_x de V est définie comme un élément $V_x(t,x,y)$ de E tel que :

$$(E\text{-}1\text{-}4) \quad \lim_{x_0 \to 0} (V(t,x+x_0,y) - V(t,x,y) - \langle x_0, V_x(t,x,y)\rangle) = 0\,(|x_0|)$$

2 - La relation (E-1-3) est équivalente à la relation suivante

$$\frac{dV(t,x,y)}{dt} \leq 0$$

En utilisant ce résultat, nous pouvons maintenant montrer l'existence et l'unicité des solutions des K-systèmes différentiels.

Par hypothèse (cf. (A-1-1)), l'application (E-12) est bien continue et bornée.

De plus $K(t)$ étant une matrice continue pour $t \in I$ on vérifie que :

- $V(t,x,y) = \langle x-y, K(t).(x-y)\rangle \geq \alpha \|x-y\|^2 \geq 0$

- $V(t,x,x) = 0$

- $\dfrac{\partial V(t,x,y)}{\partial t} = \langle x-y, \dfrac{\partial K}{\partial t}(x-y)\rangle$ existe et est continue.

Calculons l'expression (E-1-4) nous obtenons à $0(|x_o|)$ prés :

$$\lim_{x_o \to 0} \{V(t,x+x_o,y) - V(t,x,y) - \langle x_o, V_x(t,x,y)\rangle\} =$$

$$= \lim_{x_o \to 0} \{\langle x_o, 2\,K(t).(x-y)\rangle - \langle x_o, V_x(t,x,y)\rangle\} = 0$$

Donc : $\langle x_o, V_x(t,x,y)\rangle = \langle x_o, 2\,K(t).(x-y)\rangle$

$K(t)$ étant une fonction continue de $t \in I$, $V_x(t,x,y)$ sera également une fonction de t sur I ; de plus :

$$|\langle x_o, V_x(t,x,y)\rangle| = |\langle x_o, 2K(t)\,(x-y)\rangle| \leq 2\,\|K(t)\|\;\|x-y\|\;\|x_o\|$$

Donc $V_x(t,x,y)$ est bornée sur $I \times U \times U$; on en déduit que $V_x(t,x,y)$, étant une fonction linéaire et bornée de x et y, est continue en x et y sur $U \times U$.

On obtient des résultats analogues pour $V_y(t,x,y)$ de la même façon :

$$\langle y_o, V_y(t,x,y)\rangle = \langle y_o, -2\,K(t)\,(x-y)\rangle$$

Calculons :

$$V_{xx}(t,x)\,y = \lim_{h \to 0} \left(\frac{V_x(t,x+hy,x)}{h}\right)$$

il vient :

$$V_{xx}(t,x)\,y = 2\,K(t).\,y$$

$K(t)$ étant bornée, $V_{xx}(t,x)\,y$ existe bien $\forall t,x,y \in I \times U \times U$ et est bornée ; de plus l'application :

$$y \longrightarrow 2\,K(t).y$$

étant une application linéaire et bornée, elle est continue ; K(t) étant une matrice symétrique définie positive donc inversible, l'application V^{-1}_{xx} existe, est linéaire, continue et bornée.

Enfin, si les hypothèses du théorème III-1 sont vérifiées on aura bien :

$$\frac{dV\ (t,x,y)}{dt} \leqslant 0 \qquad\qquad \forall\, t,\ x,\ y \in I \times U \times U$$

Nous avons donc établi l'existence des solutions des K-systèmes différentiels ; il nous reste à établir leur unicité ; pour cela nous remarquons que :

$$\forall\ t,x,y \in I \times U \times U \qquad V(t,x,y) = \langle x-y,\ K(t).\ (x-y)\rangle = 0 \longrightarrow x-y = 0$$

Donc $\qquad x = y$

Proposition III-7.

Soit un K-système différentiel (fort ou faible). Si les hypothèses (A-2-1) ou (A-2-2) du théorème III-1 sont vérifiées, alors il y a existence et unicité des solutions de ce système différentiel.

2°) Cas particulier. Existence et unicité des soltuions d'un H-système différentiel

Nous avons établi au paragraphe D qu'un H-système différentiel était un cas particulier de K-système différentiel. Nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition III-8

Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

un H-système différentiel ; si les hypothèses des théorèmes II-2 ou II-5 sont vérifiées, alors il y a existence et unicité des solutions de ce système différentiel.

F - Exemples

1°) Exemple I : systèmes linéaires à coefficients constants

Proposition III- 9

Considérons le système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$(F\text{-}1\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax$$

où A vérifie la condition suivante :

$$(F\text{-}1\text{-}2) \qquad \langle -Ax, Kx \rangle \geq \beta \, \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec :

$$(F\text{-}1\text{-}3) \qquad \langle x, Kx \rangle \geq \alpha \, \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

où K est une matrice symétrique.

Sous ces hypothèses, A a des valeurs propres à parties réelles négatives et la solution $x = 0$ de (F-1-1) est asymptotiquement stable.

Démonstration

En effet, compte tenu des propriétés de symétrie du produit scalaire on a :

$$\langle -KAx, x \rangle \geq \alpha \, \|x\|^2$$

$$\langle -A^* Kx, x \rangle \geq \alpha \, \|x\|^2$$

En sommant, et en posant :

$$(F\text{-}1\text{-}4) \qquad C = -(A^* K + KA)$$

on obtient :

$$\langle Cx, x \rangle \geq 2\alpha \, \|x\|^2$$

Donc C est une matrice définie positive ; de plus on vérifie que C est symétrique car :

$$C^* = -(A^* K + KA)^* = C$$

Comme K est également une matrice symétrique définie positive on sait alors (cf. {9} page 295 Lemme 1-5 ou {6} tome II page 183, théorème 3) que l'égalité (F-1-4) ne peut avoir lieu qu'à condition que :

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_i\,(A)) < 0 \qquad \text{pour tout } i$$

La solution de (F-1-1) est donnée par :

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0$$

est, alors, absolument stable.

2°) Exemple II

Considérons dans $E = \mathbb{R}^2$ le système différentiel non linéaire :

$$(F\text{-}2\text{-}1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = -x_1(1 + x_2^2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) = -x_2(1 + x_1^2) \end{cases}$$

admettant la solution :

$$\tilde{x} = \{0, 0\}$$

Soit la matrice K symétrique, définie positive :

$$(F\text{-}2\text{-}2) \qquad K = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

Vérifions que (F-2-1) est un K-système différentiel fort pour tout $x \in E$. En effet on a :

$$\langle -f(x), Kx \rangle = -\frac{1}{2}(f_1(x_1,x_2).x_1 + f_2(x_1,x_2).x_2) = \frac{1}{2}\{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2)^2\}$$

Donc :

$$\langle -f(x), Kx \rangle \geq \frac{1}{2} \|x\|^2$$

En vertu du théorème III-6 on en déduit immédiatement que la solution $\tilde{x}$ est absolument stable sur tout l'espace E.

Nous pouvons vérifier cette propriété de deux façons différentes.

1°) Définissons la fonction V(x) comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \geq 0 \qquad \text{et } V(\tilde{x}) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = -\{x_1^2(1 + x_2^2) + x_2^2(1 + x_1^2)\} \leq 0$$

V(x) est une fonction de LIAPOUNOV à dérivée définie négative sur toute boule centrée à l'origine ; donc $\tilde{x}$ est une solution absolument stable de (F-2-1).

2°) La figure III-1 est le résultat graphique d'une intégration numérique de (F-2-1) pour les conditions initiales suivantes :

$x_{10} = \pm 14$ et x_{20} prend toutes les valeurs de l'ensemble J

x_{10} prend toutes les valeurs de l'ensemble J et $x_{20} = \pm 14$.

On constate bien que toutes les solutions tendent vers l'origine quand $t \to \infty$

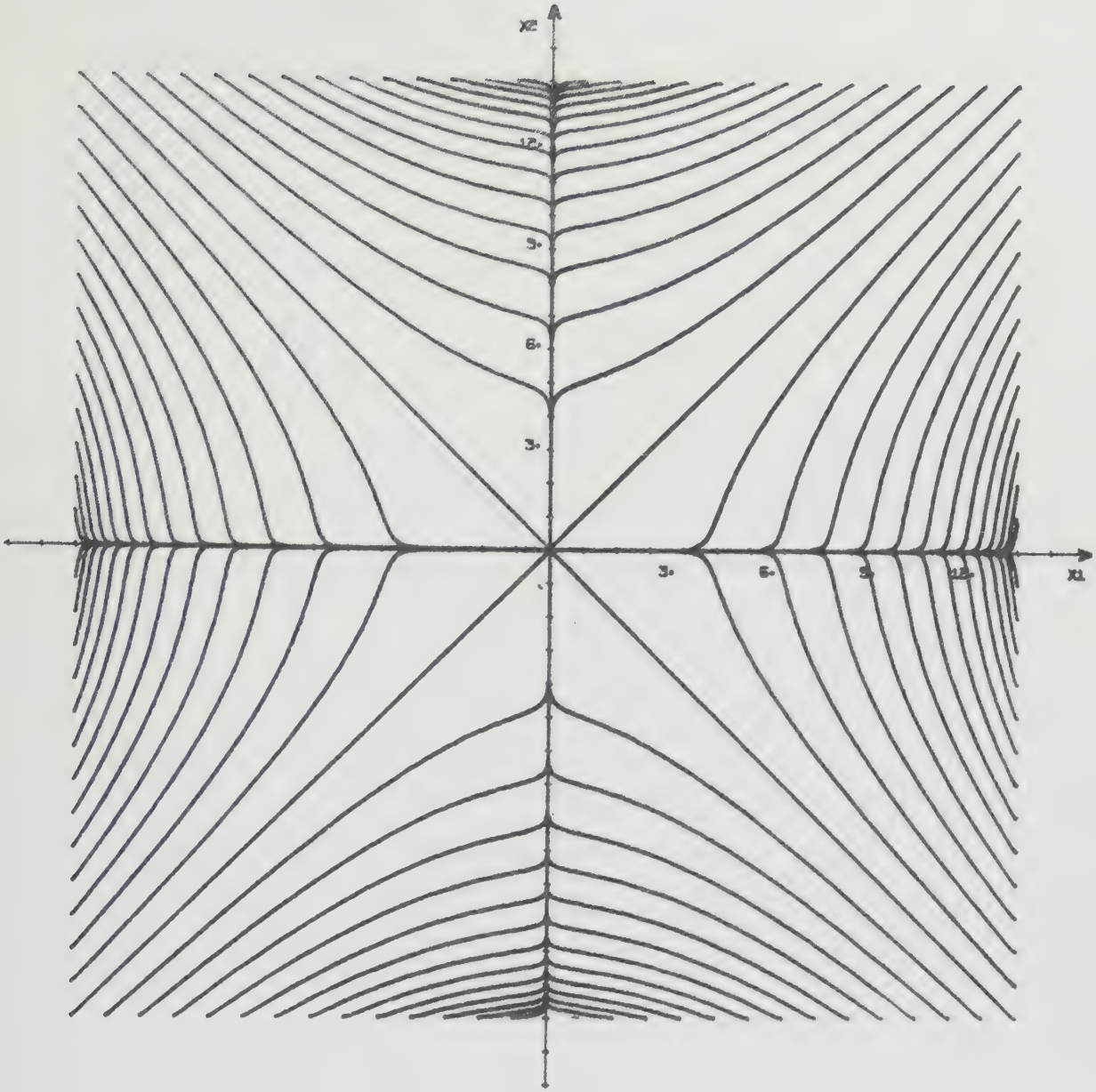

Figure III.1 - Etude des orbites du système différentiel

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1 . (1 + x_2^2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - x_2 (1 + x_1^2)$$

3°) Exemple III

Nous nous plaçons dans $E = \mathbb{R}^2$ et nous envisageons le système différentiel suivant :

$$(F\text{-}3\text{-}1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_1 (x_2^2 - 1) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) = x_2 (x_1^2 - 1) \end{cases}$$

$\tilde{x} = \{0,0\}$ étant solution de (F-3-1) , déterminons la boule centrée à l'origine pour laquelle (F-3-1) est un K-système différentiel, relativement à la matrice K définie par (F-2-2) ; dans ces conditions on a :

$$(F\text{-}3\text{-}2) \qquad \langle f(x), K x \rangle = \frac{1}{2} \{x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1^2 x_2^2\} \geq \beta (x_1^2 + x_2^2)$$

Le problème revient à chercher le nombre positif ou nul β, vérifiant l'inégalité (F-3-2) ; passons en coordonnées polaires :

$$x_1 = r \cos \theta$$
$$x_2 = r \sin \theta$$

(F-3-2) devient :

$$(F\text{-}3\text{-}3) \qquad (2 - 4\beta) \geq r^2 (\sin 2\theta)^2$$

L'inégalité précédente nous permet de définir le domaine de variation de β:

$$(F\text{-}3\text{-}4) \qquad 0 \leq \beta < \frac{1}{2}$$

De plus, l'inégalité (F-3-3) a lieu quelque soit θ et, en particulier, pour la valeur de θ rendant maximum la fonction $(\sin 2\theta)^2$; ce maximum étant égal à 1, on a :

$$(2 - 4\beta) \geq r^2$$

Compte tenu de (F-3-4), on vérifie facilement que la valeur maximale r_{max} de r est obtenue pour $\beta = 0$ et que :

$$r_{max} = \sqrt{2}$$

Comme précédemment vérifions expérimentalement ce résultat en associant à (F-3-1) la fonction suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad , \quad V(\tilde{x}) = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 (x_2^2 - 1) + x_2^2 (x_1^2 - 1)$$

Soit, en passant en coordonnées polaires :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} r^2 (r^2 (\sin 2\theta)^2 - 2)$$

Le domaine de stabilité étant déterminé par la condition :

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

on en déduit :

$$r_{max} = \sqrt{2}$$

Donc le disque centré à l'origine et de rayon r_{max} est un domaine de stabilité pour (F-3-1) .

Comme précédemment nous avons fait une vérification expérimentale du résultat et nous résumons notre étude par la figure III.2.

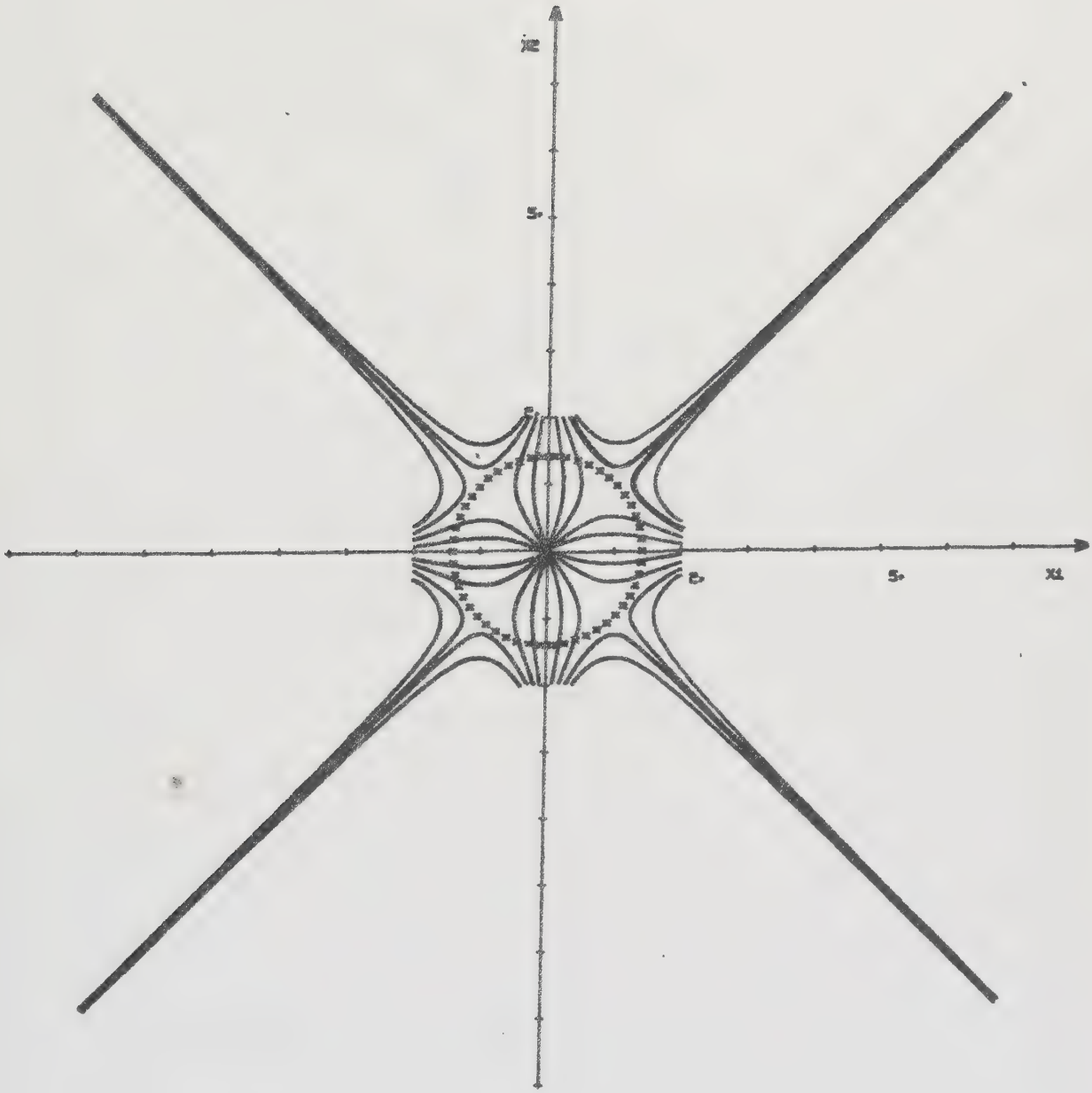

Figure III.2 - Représentation des orbites du système

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \, (x_2^{\,2} - 1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \, (x_1^{\,2} - 1)$$

4°) Exemple IV

Soit le système différentiel suivant :

$$(F\text{-}4\text{-}1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2\, x_1^{\,3}\, x_2^{\,2} - x_1 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -\, x_2 \end{cases}$$

ainsi que la matrice

$$K = I \qquad \text{(matrice identité)}$$

$\tilde{x} = \{0,0\}$ étant solution de (F-4-1) nous nous proposons de résoudre le même problème qu'au paragraphe (F-3) . Dans ces conditions on aura :

$$< -\, f(x),\ K.z > = (x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) - 2\, x_1^{\,4}.x_2^{\,2} \geq \beta\,(x_1^{\,2} + x_2^{\,2})$$

D'où :

$$(F\text{-}4\text{-}2) \quad (1-\beta)\ (x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) \geq 2\, x_1^{\,4}\, x_2^{\,2}$$

De l'inégalité (F-4-2) on déduit que :

$$1 > \beta \geq 0$$

De plus en passant en coordonnées polaires :

$$x_1 = r \cos \theta$$
$$x_2 = r \sin \theta$$

on obtient :

$$(1 - \beta) \geq \frac{1}{2}\ r^4\ (\sin 2\,\theta\ .\ \cos \theta)^2$$

Comme pour l'exemple III, cette inégalité doit avoir lieu quelque-soit θ et en particulier pour la valeur de θ rendant maximum la fonction $(\sin 2\,\theta.\ \cos \theta)^2$; ce maximum étant atteint lorsque $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nous obtenons

la valeur maximale de r_{max} lorsque $\beta = 0$; donc

$$\frac{54}{16} \geqslant r^4$$

D'où :

$$r_{max} = 1,355\ 403 \geqslant r$$

Vérifions ce résultat en déterminant une fonction de LIAPOUNOV quadratique de la forme :

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\ (2\ x_1^4\ x_2^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

En passant en coordonnées polaires nous obtenons :

$$\frac{dV}{dt} = 2\ r^2\ (-1 + \frac{1}{2}\ r^4\ (\sin 2\ \theta . \cos \theta)^2)$$

La condition

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0$$

doit être vérifiée quelque soit θ, a lieu lorsque :

$$r \leqslant 1,355\ 403$$

et la boule centrée à l'origine et de rayon r_{max} est un domaine de stabilité pour **(F-4-1)**

Une intégration numérique de (F-4-1) nous permet de vérifier expérimentalement ce résultat et cette étude est résumée par la figure III.3

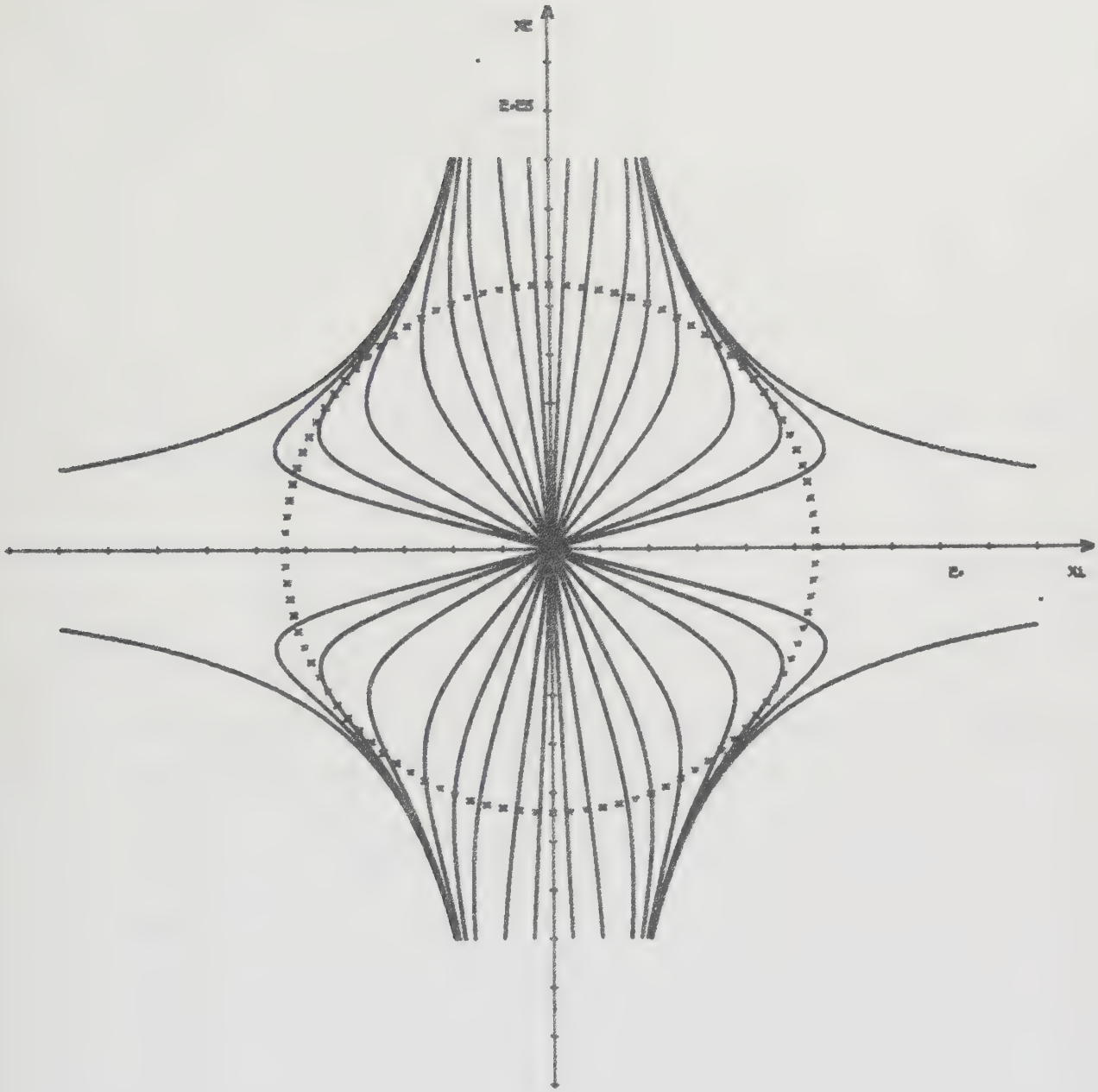

Figure III.3 - Etude du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\, x_1^{\,3}\, x_2^{\,2} - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\, x_2$$

5°) Exemple V

Nous considérons maintenant le système différentiel non linéaire et non autonome suivant :

$$(F\text{-}5\text{-}1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = - x_1 \, (1 + x_2^{\,2}) \, e^{at} \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = - x_2 \, (1 + x_1^{\,2}) \, e^{bt} \end{cases}$$

où a et b sont des nombres positifs ; soit, également, la matrice symétrique, définie positive :

$$K(t) = \begin{vmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{vmatrix}$$

Vérifions que (F-5-1) est un K-système différentiel sur toute boule centrée à l'origine ; en effet on a :

$$<- f(t;x), K(t)x> = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 2\, x_1^{\,2} . x_2^{\,2} \geq \|x\|^2$$

comme :

$$<x, \frac{dK}{dt} \; x> = - x^t \begin{vmatrix} a\, e^{-at} & 0 \\ 0 & b e^{-bt} \end{vmatrix} x \leq 0$$

en vertu du théorème III-3 on en déduit que la solution $\tilde{x} = \{0,0\}$ est absolument stable sur tout l'espace $E = \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas encore

$$V(t,x) = e^{-at} \, x_1^{\,2} + e^{-bt} \, . \, x_2^{\,2} \geq 0$$

est fonction de LIAPOUNOV, admettant comme dérivée eulérienne :

$$\frac{dV}{dt} = - a e^{-at} \, x_1^{\,2} - b e^{-bt} \, x_2^{\,2} - 2 \, (x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 2\, x_1^{\,2} \, x_2^{\,2}) \leq 0$$

une vérification expérimentale effectuée pour

$$a = b = 1$$

est résumée par la figure III .4 et nous permet de constater que l'origine est un point d'attraction pour toutes les solutions issues de n'importe quel point de $\mathbb{R}^2$.

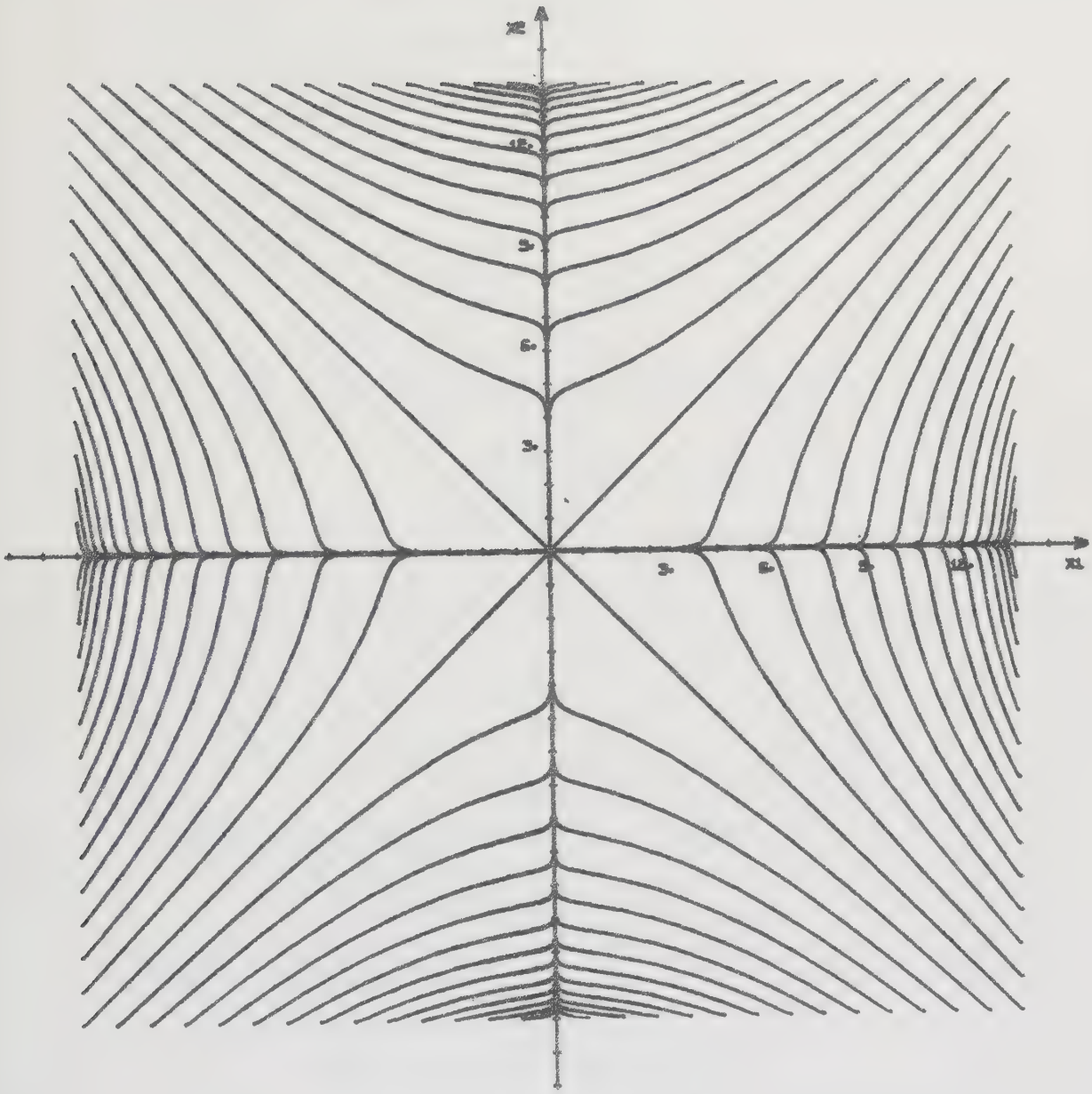

Figure III.4 - Plan des orbites pour le système différentiel

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1 \, (1 + x_2^2) \, e^t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - x_2 \, (1 + x_1^2) \, e^t$$

6°) Exemple VI

Considérons, toujours dans $E = \mathbb{R}^2$, le système différentiel non linéaire et non autonome :

$$(F\text{-}G\text{-}1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = - x_1 \, x_2^{\,2} - x_1 \, e^{at} \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^{\,2} . x_2 - \quad x_2 \, e^{at} \end{cases}$$

où a est un nombre positif ainsi que la matrice

$$K(t) = \begin{vmatrix} \beta e^{-at} & 0 \\ 0 & \beta e^{-at} \end{vmatrix} \qquad \beta > 0$$

Vérifions que **(F-6-1)** est un K-système différentiel sur $\mathbb{R}^2$; en effet on a :

$$<-f(t,x), K(t)\ x> = \beta\ (x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) \geqslant \beta\ \|x\|^2$$

comme précédemment on définit la fonction :

$$V(t,x) = \beta e^{-at}\ (x_1^{\,2} + x_2^{\,2})$$

et on vérifie que :

$$\frac{dV}{dt} = - \beta\ (ae^{-at} + 2)\ \ \|x\|^2 \leq 0$$

Donc V(t,x est fonction de LIAPOUNOV et le point $\tilde{x} = \{0,0\}$ est un point singulier de **(F-6-1)**

Comme précédemment nous avons vérifié expérimentalement cette propriété de (F-6-1) pour la valeur :

$$a = 1$$

Nous en avons déduit la figure III.5 où nous constatons que la solution $\tilde{x}$ est absolument stable.

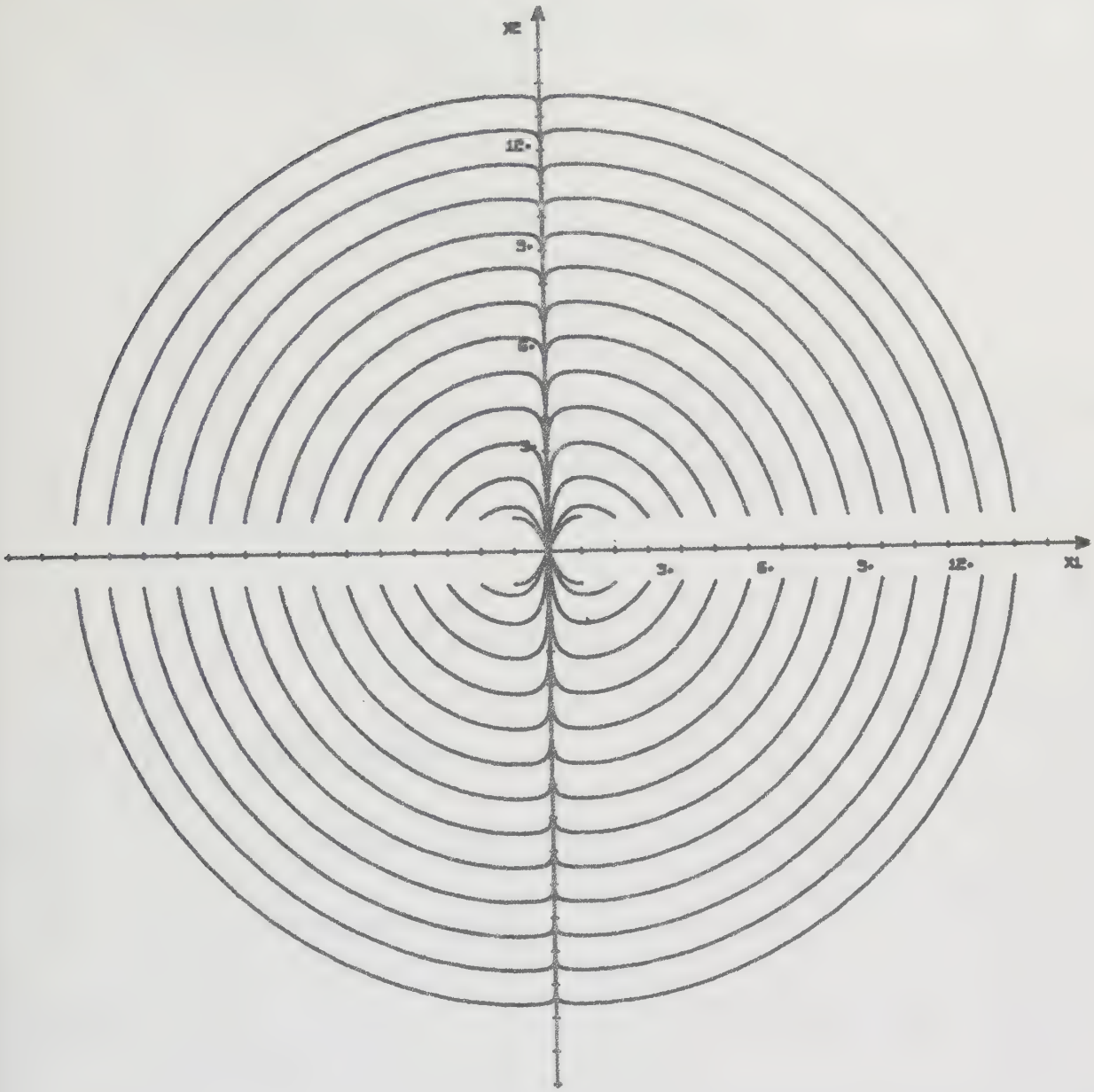

Figure III.5 - Etude des orbites des équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1 \, x_2^{\,2} - x_1 \, e^{t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^{\,2} \, x_2 - x_2 \, e^{t}$$

G - Perturbation de K-systèmes différentiels

1°) Application du premier théorème de BELLMAN à un K-système linéaire faible.

Théorème III-9

Si le système différentiel linéaire .

$$(G\text{-}1\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t).x$$

est un K-système différentiel faible pour tout $t \in I$, alors, à condition que la matrice $B(t)$ de dimension n soit une fonction continue de t et satisfasse :

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|B(s)\| \, ds < +\infty ,$$

le système linéaire :

$$(G\text{-}1\text{-}2) \qquad \frac{dx}{dt} = (A(t) + B(t))\, x$$

est uniformément stable.

Démonstration

Le système (G-1-1) étant un K-système différentiel, on sait qu'il est uniformément stable.

On peut alors appliquer le premier théorème de BELLMAN (cf. {9} et {17}).

2°) Analogue du deuxième théorème de BELLMAN

Théorème III-10

Si le système différentiel linéaire homogène

$$(G\text{-}2\text{-}1) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t)\, x$$

est un K-système différentiel fort pour tout $t \in I$, vérifiant la condition :

$$< -A(t)x \, , \, K(t)\, x > \geq \beta \|x\|^2$$

et si, de plus, la matrice $B(t)$ d'ordre n vérifie la condition suivante pour t suffisamment grand :

$$\|B(t)\| \leq C$$

où C est un nombre qui ne dépend que de A par la condition suivante :

$$(G\text{-}2\text{-}2) \quad \beta - C \ \|K(t)\| \geq 0$$

alors le système linéaire :

$$(G\text{-}2\text{-}3) \quad \frac{dx}{dt} = (A(t) + B(t)\ x$$

est un K-système différentiel fort.

Démonstration

Posons $F(t,x) = A(t)\ x + B(t)\ x$

et évaluons :

$$<- F(t,x)\ ,\ K(t)\ x> = <- A(t)\ x,\ K(t)\ x> + <-B(t)\ x,\ K(t)\ x>$$

$$<- F(t,x)\ ,\ K(t)\ x> \geq <- B(t)\ x,\ K(t)\ x> + \beta\ \|x\|^2$$

Or, d'après l'inégalité de SCHWARTZ

$$-<B(t).x,\ K(t)\ x> \geq -\|K(t)\|\ \|B(t)\|\ \|x\|^2 \geq -\ \|K(t)\|\ C\ \|x\|^2$$

Donc :

$$<- F(t,x),\ K(t)x > \geq (\beta - C\ \|K(t)\|)\ \|x\|^2$$

Si l'hypothèse (G-2-2) est vérifiée, (G-2-3) sera un K-système différentiel.

Corollaire III- 3

Sous les hypothèses précédentes, la solution $\tilde{x} = x(t,o)$ du système différentiel (G-2-3) est absolument stable.

La démonstration de ce corollaire est une simple conséquence du théorème III-1.

3°) Analogue du théorème de POINCARE-LIAPOUNOV et extension au cas non linéaire

Théorème III-11

Supposons que le système différentiel linéaire et homogène

$$(G-3-1) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t)\ x$$

soit un K-système différentiel fort vérifiant la condition :

$$\langle -A(t)\ x,\ K(t)\ x\rangle \geq \beta\ \|x\|^2 \qquad \forall\ t,x \in I \times U$$

Supposons une application $f(t,x)$ définie sur $I \times U$, continue et localement lipschitzienne sur $I \times U$; on suppose en outre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $t \geq t_0$, $\|x\| \leq \delta$ entrainent :

$$(G-3-2) \qquad \|f(t,x)\| \leq \varepsilon\ \|x\|$$

Dans ces conditions, et tant que

$$(G-3-3) \qquad (\beta - \varepsilon\ \|K(t)\|) \geq 0$$

le système différentiel non linéaire :

$$(G-3-4) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t)\ x + f(t,x)$$

est un K-système différentiel fort.

Démonstration

Posons :

$$g(t,x) = A(t)\ x + f(t,x)$$

Nous avons :

$$\langle -g(t,x)\ ,\ K(t)\ x\rangle = \langle -\ A(t)\ x\ ,\ K(t)\ x\rangle - \|x\|\ \langle \frac{f(t,x)}{\|x\|},\ K(t)\ x\rangle$$

appliquons, encore, l'inégalité de SCHWARTZ, il vient :

$$\langle -g(t,x)\ ,\ K(t)\ x\rangle \geq \beta\ \|x\|^2 - \|K(t)\|\ \frac{\|f\ (t,x)\|}{\|x\|}\ \|x\|^2$$

D'où :

$$<-g(t,x)\ ,\ K(t)x> \geq (\beta-\varepsilon\,\|K(t)\|)\ \|x\|^2$$

et tant que la condition (G-3-3) est vérifiée, (G-3-4) est un K-système différentiel fort.

Corollaire III-4

Sous les hypothèses précédentes, la solution $\tilde{x} = x(t,o)$ du système différentiel (G-3-4) est absolument stable.

Remarque :

Nous pouvons étendre ce résultat au cas où le système perturbé est un système non linéaire ; la démonstration étant rigoureusement identique, nous nous contenterons simplement d'énoncer :

Théorème III-12

Soit une application non linéaire

$$g(t,x) : I \times U \to E \qquad \text{telle que } g(t,o) = 0 \quad \forall t \in I$$

et le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)$$

vérifiant la condition :

$$<-g(t,x)\ ,\ K(t)\,x> \geq \beta\ \|x\|^2 \qquad \forall t,x \in I \times U$$

Soit $f(t,x)$ une application définie, continue, localement lipschitzienne sur $I \times U$ et vérifiant la propriété suivante :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, *tel que, dès que* $t \geq t_o$ *et* $\|x\| \leq \delta$ *on ait :*

$$\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\,\|x\|$$

Dans ces conditions, tant que :

$$(\beta-\varepsilon\,\|K(t)\|) \geq 0 \qquad \forall t \in I$$

le système différentiel non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x) + f(t,x)$$

est un K-système différentiel fort, et la solution $\tilde{x} = x(t,o)$ *est absolument stable.*

CONCLUSION

La présente étude nous a permis de mettre en évidence deux classes de systèmes différentiels : les H-systèmes différentiels et les K-systèmes différentiels.

L'intérêt de ce travail réside en la détermination d'un domaine de stabilité absolue ou uniforme pour une solution, en proposant soit des méthodes de construction de fonctions de LIAPOUNOV, soit la vérification des propriétés suivantes :

1°) le second membre du système différentiel doit satisfaire au moins l'une des conditions particulières de monotonie propre à chacune des deux classes.

2°) uniquement dans le cas des systèmes différentiels non autonomes, les matrices K mises en évidence au chapitre II et III sont des fonctions décroissantes ou constantes du temps.

On remarque que, dans le cas des H-systèmes différentiels non autonomes, un critère équivalent au précédent est le suivant :

2 bis) le vecteur propre de la M-V-minorante associée à la valeur propre réelle de plus petit module est une fonction décroissante ou constante du temps.

Il faut en outre souligner que, dans le cas des systèmes différentiels autonomes, la propriété 2 (ou 2 bis) est toujours satisfaite ce qui simplifie considérablement l'application des résultats.

Soulignons, pour terminer, l'intérêt pratique de la notion de H-systèmes différentiels qui fournit une condition de stabilité absolue pour une classe bien caractérisée de grands systèmes différentiels se décomposant en sous-systèmes.

ANNEXE I

Notion de norme vectorielle

Définition

Soient :

- $\mathbb{R}^n_+$ *le cône des éléments de* $\mathbb{R}^n$ *qui ont toutes leurs composantes positives ou nulles*
- *E un espace vectoriel*

Nous dirons que l'application qui, à $x \in E$, *fait correspondre* $q(x) \in \mathbb{R}^n_+$ *telle que :*

1) $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2) $\forall y \in E$

$q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ *inégalité triangulaire*

3) $q(\lambda x) = |\lambda| \; q(x)$ $\forall \lambda \in R$

est une norme vectorielle.

Pour une définition générale cf. F. ROBERT {16}

ANNEXE II

Z-matrice et M-matrice

Définition

On appelle Z-matrice ou matrice de la classe Z, toute matrice dont les coefficients diagonaux sont positifs et dont les coefficients hors diagonaux sont négatifs ou nuls.

Théorème

Soit N une Z-matrice. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1 - *Il existe un vecteur* $x \geq 0$ *tel que* $Nx \geq 0$.

2 - *Il existe un vecteur* $x > 0$ *tel que* $Nx > 0$.

3 - *Il existe une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont positifs telle que* $NDe > 0$ *(où e est le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1).*

4 - *Il existe une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont positifs, telle que la matrice* $W = ND$ *soit une matrice à diagonale dominante.*

5 - *Pour toute matrice diagonale R telle que* $R \geq N$, *l'inverse* R^{-1} *existe, et le rayon spectral de* $R^{-1}(P - N)$ *est inférieur à 1, où P est la diagonale de N .*

6 - *Si B est une Z-matrice telle que* $B \geq N$, *alors* B^{-1} *existe.*

7 - *Toute valeur propre réelle de N est positive.*

8 - *Tous les déterminants mineurs principaux de N sont positifs.*

9 - *Il existe une suite strictement croissante d'ensembles d'indices* $0 \neq J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots \subset J_n = n$ *telle que les déterminants mineurs principaux de* $N(J_i)$ *soient positifs .*

10 - *Il existe une matrice de permutation P telle que PAP^{-1} peut être écrite sous la forme RS où R est triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs et hors diagonaux négatifs ou nuls et S est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs et hors diagonaux négatifs ou nuls.*

11 - *L'inverse N^{-1} existe et $N^{-1} \geq 0$.*

12 - *La partie réelle de chaque valeur propre est positive.*

13 - *Pour tout vecteur $x \neq 0$, il existe un indice $k > 0$ tel que $x_k \, y_k > 0$ pour $y = Ax$.*

Définition

Une Z-matrice vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème précédent est appelée une M-matrice.

Théorème de TARTAR

Soit N une M-matrice. Alors il existe une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs telle que DN soit définie positive.

ANNEXE III

Principales notations utilisées.

$\mathbb{R}$	corps des réels
$\mathbb{R}_+$	ensemble des éléments positifs ou nuls de R
E_i, E	espaces de HILBERT sur $\mathbb{R}$
$< \, , \, >_i$	produit scalaire défini dans E_i
$\| \quad \|_i$	norme scalaire définie dans E_i
$\mathcal{L}(E_i, E_j)$	ensemble des applications linéaires continues de E_i dans E_j
$< \, , \, >$	produit scalaire défini dans E
$\| \quad \|$	norme euclidienne définie dans E
$p \, (\,)$	norme vectorielle définie dans E
Π_i	projecteur orthogonal de E dans E_i
$\tilde{\Pi}_i$	projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur le $i^{ème}$ axe
I	ensemble fermé $\{t_o, T\} \subset \mathbb{R}$
U	ensemble ouvert de E
$M\{f, t, x, y\}$	M-V-minorante associée à une application H-monotone $f(t, x)$
V, V_1, V_2	fonctions de LIAPOUNOV associées à un système différentiel
$\tilde{x}$	solution triviale d'un système différentiel
J	ensemble $\{-14, -13, \ldots, -1, +1, \ldots, +14\}$
$x(t, x_o)$	solution d'un système différentiel ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

{1} E.A. BARBASHIN — *Introduction to the theory of stability. Wolters-Noordhoff Publishing Gronigen - 1970.*

{2} H. CARTAN — *Calcul différentiel - Herman - 1967.*

{3} L. CESARI — *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations - Springer-Verlag - Berlin Heidelberg New York - 1971.*

{4} M. FIEDLER, V. PTAK — *On matrices with non-positives off diagonal elements and positives principal minors. Czec. Math. J-12 (87) - 382-400 - 1962.*

{5} M. FIEDLER, V. PTAK — *Some results on matrices of class K and their application to the convergence rate of iteration procedures - Czec. Math. J.16 (91) - 260-273 - 1966.*

{6} F.R. GANTMACHER — *Théorie des matrices - Dunod - 1966.*

{7} J.C. GENTINA, P. BORNE, F. LAURENT — *Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension - RAIRO - pages 69-77 - Août 1972.*

{8} W. HAHN — *Theory and application of LIAPOUNOV's direct method - Prentice - Hall, Inc - 1963.*

{9} J. HALE — *Ordinary differentiel equations - Wiley interscience - 1969.*

{10} P. HARTMANN — *Generalized LYAPOUNOV functions and functionnal equations - Annali di Matematica - 69-1965 - pages 305-320.*

{11} N.N. KRASOVSKI — *Stability of motion - Stanford university - 1963.*

{12} J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ — *Stability by LIAPOUNOV's direct method - Academic Press - 1961.*

{13} J.C. MIELLOU — *Adaptation de quelques algorithmes classiques à la résolution de problèmes comportant un opérateur somme d'un opérateur différentiable et d'un opérateur non différentiable* -Colloque d'Analyse numérique - EPINAL - 1972.

{14} J.C. MIELLOU — *Thèse* - GRENOBLE - 1970.

{15} J.C. MIELLOU — *Sur une variante de la méthode de relaxation appliquée à des problèmes comportant un opérateur somme d'un opérateur différentiable et d'un opérateur maximal monotone* - CRAS - t. 275 - 20 Novembre 1972 - Série A.

{16} F. ROBERT — *Thèse* - GRENOBLE - 1968.

{17} M. ROSEAU — *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité* - Springers tracts - 1966.

{18} N. ROUCHE, J. MAWHIN — *Equations différentielles ordinaires* - Masson et Cie - 1973.

{19} L. TARTAR — *Une nouvelle caractérisation des M-matrices* - Brèves communications de l'AFCET - 1972.

{20} R.S. VARGA — *Matrix iterative analysis* - Prentice Hall - 1962.

{21} N.P. ZHIDKOV, I.S. BEREZIN — *Computing methods* - Pergamon Press - 1965.

N° d'ordre : 200

Jury	MM. R.	CHALEAT	Président
	P.	CAPODANNO	Examinateurs
	F.	LHOTE	
	J.C.	MIELLOU	
	F.	ROBERT	

Vu et permis d'imprimer

BESANCON, le Juin 1974

Le Doyen de la Faculté des Sciences et des Techniques

J. BERNARD